



TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Identificação de sistemas usando as Séries de Volterra

João Paulo Costa e Souza

Brasília, Julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Identificação de sistemas usando as Séries de Volterra

João Paulo Costa e Souza

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Eletricista*

Banca Examinadora

Prof. Flavia Maria Guerra de Sousa Aranha Oli-
veira, ENE/UnB _____
Orientadora

Prof. João Luiz Azevedo de Carvalho, _____
ENE/UnB
Examinador

Prof. Lélío Ribeiro Soares Júnior, ENE/UnB _____
Examinador

Dedicatória

Dedico este trabalho em primeiro lugar a Cristo que colocou força em meu coração e energia em minha mente para que pudesse seguir até o final. Dedico também à família aos amigos e mestres, que me apoiaram incondicionalmente.

João Paulo Costa e Souza

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as oportunidades e pela vida que me deu. Agradeço com todo carinho a minha família, que me foi sempre incansável. Agradeço em especial a minha mãe e tia, por todo o investimento, e incentivo, mas principalmente pela chance da formação da minha personalidade e da minha humanidade. Agradeço também a minha orientadora, pela constante doçura com que me orientou, e por seu inquestionável profissionalismo.

João Paulo Costa e Souza

RESUMO

O presente trabalho trata de um estudo das Séries de Volterra, e dois dos seus métodos de resolução : O algoritmo de correlação cruzada de Lee-Schetzen e o método de expansão de Laguerre. Foi feita, primeiramente, uma revisão dos principais conceitos teóricos acerca dos dois métodos, e posteriormente várias simulações computacionais utilizando MATLAB, para a sua comparação. As comparações feitas foram a respeito do uso do ruído branco gaussiano como entrada, do uso de entradas genéricas, da capacidade de estimativa de sistema de ordem superior à segunda, e de estimativa de sistemas reais. Concluiu-se que, em termos de qualidade, o método de expansão de Laguerre mostrou-se superior em todos os casos estudados.

ABSTRACT

The present work deals with a study of the Volterra Series, and two of its resolution methods: The Lee-Schetzen cross-correlation algorithm and the Laguerre expansion method. First, a review of the main theoretical concepts about the two methods was made, and later several computational simulations using MATLAB, for their comparison. The comparisons were made regarding the use of Gaussian white noise as input, the use of generic inputs, the ability to estimate the system of higher order, and the estimation of real systems. It was concluded that, in terms of quality, Laguerre's method of expansion was superior in all studied cases.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO	1
2	BACKGROUND	2
2.1	INTRODUÇÃO	2
2.2	REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE SINAIS	2
2.3	CORRELAÇÃO E COVARIÂNCIA	3
2.3.1	FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E COVARIÂNCIA E SUAS RELAÇÕES COM O RUÍDO ..	4
2.4	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	5
2.5	ESTIMANDO A RESPOSTA AO IMPULSO	8
2.5.1	MÉTODO DE WELCH	9
2.5.2	MÉTODO PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA	9
3	INTRODUÇÃO À SÉRIE DE VOLTERRA.....	11
3.1	SISTEMA NÃO LINEAR	11
3.2	A EQUAÇÃO DA SÉRIE DE VOLTERRA	12
3.2.1	A SÉRIE DE VOLTERRA FINITA	13
3.3	A SÉRIE DE WIENER	13
3.3.1	DETERMINANDO OS OPERADORES DE WIENER	14
3.3.2	DETERMINANDO OS KERNEIS DE WIENER	17
3.4	ALGORITMO DE LEE - SCHETZEN.....	19
3.5	AS EXPANSÕES DOS KERNEIS DE VOLTERRA	19
3.6	AS FUNÇÕES DE LAGUERRE	23
3.7	OS PARÂMETROS DE LAGUERRE	23
3.7.1	A INFLUÊNCIA DA ORDEM DAS FUNÇÕES DE LAGUERRE, NA IDENTIFICAÇÃO DOS KERNEIS DE VOLTERRA	23
3.7.2	A INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO α	25
3.7.3	A INFLUÊNCIA QUANTO AO NÚMERO DE PONTOS	26
3.7.4	O EFEITO DO RUÍDO.....	28
3.7.5	ENTRADA DIFERENTE DO RUÍDO BRANCO GAUSSIANO.....	28
4	SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS E ESTUDO COMPARATIVO	31
4.1	INTRODUÇÃO	31

4.2	COMPARAÇÃO A PARTIR DE ENTRADAS DO TIPO RUÍDO BRANCO GAUSSIANO ..	31
4.2.1	ALGORITMO DE LEE-SCHETZEN	31
4.2.2	MÉTODO DE EXPANSÃO VIA FUNÇÕES DE LAGUERRE	33
4.3	COMPARAÇÃO À PARTIR DE ENTRADAS GENÉRICAS.....	36
4.3.1	ALGORITMO DE LEE-SCHETZEN	37
4.3.2	MÉTODO DE EXPANSÃO VIA FUNÇÕES DE LAGUERRE	38
4.4	COMPARAÇÃO QUANTO A ESTIMATIVA DE UM SISTEMA DE TERCEIRA ORDEM .	40
4.5	COMPARAÇÃO À PARTIR DE DADOS REAIS	44
5	CONCLUSÕES	48
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama de blocos para identificação de sistema em malha aberta	8
2.2	Diagrama de blocos para identificação de sistema em malha fechada	10
3.1	Diagrama de blocos para uma saída $y(t)$ modelada por vários filtros lineares $b_j(t)$, e uma não-linearidade $f(\bullet)$	21
3.2	Funções de Laguerre em tempo discreto de ordens: 0 (linha sólida), 1 (pontilhada), 2 (tracejada), 3 (ponto e traço), 4 (ponto-ponto-ponto-traço), para $\alpha = 0, 2, [3]$	24
3.3	Funções de Laguerre em tempo discreto, de ordem 4(contínua), de ordem 8(pontilhada), de ordem 12(tracejada), de ordem 16(ponto-traço)	24
3.4	Gráfico das fases das transformadas de fourier das cinco primeiras funções de Laguerre, (de ordem 0 até 4), para $\alpha = 0, 2$, plotadas para a frequência de Nyquist normalizada de 0,5	25
3.5	Função de Laguerre de quarta ordem, para $\alpha = 0, 1$ (linha contínua), $\alpha = 0, 2$ (tracejada), $\alpha = 0, 4$ (pontilhada)	26
3.6	Magnitude da transformada de fourier da função de Laguerre de quarta ordem, para $\alpha = 0, 1$ (traço 1), $\alpha = 0, 2$ (traço 2), $\alpha = 0, 4$ (traço 3)	26
3.7	Estimativa do kernel de primeira ordem, obtido via método de Laguerre(linha contínua), via método de Lee-Schetzen(linha tracejada)	27
3.8	Simulação do Kernel de segunda ordem com método de Laguerre(esquerda), método de Lee-Schetzen(direita), utilizando 512 pontos	27
3.9	Kernel de primeira ordem, obtido com o método de Laguerre (linha contínua), e o método de Lee-Schetzen(linha tracejada), para dados com ruído	28
3.10	Espectro de amplitude de um sinal que diverge do ruído branco gaussiano	29
3.11	Kernel de primeira ordem para sinal que diverge do ruído branco gaussiano, método de Laguerre (linha contínua), método de Lee-Schetzen (linha tracejada)	29
3.12	Kerneis de segunda ordem para sinal que diverge do ruído branco gaussiano, método de Laguerre (linha contínua), método de Lee-Schetzen (linha tracejada)	30
4.1	Diagrama de blocos do sistema não linear de segunda ordem, usado nas simulações ..	32
4.2	Entrada do tipo ruído branco(preto) e a respectiva saída (vermelho) de um sistema não-linear de segunda ordem	32
4.3	Auto correlação do ruido branco gaussiano.....	33

4.4	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtido via algoritmo de Lee-Schetzen, de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco gaussiano.....	33
4.5	Saída original (vermelho), e saída estimada (verde) para uma estimativa usando o método de Lee-Schetezen, o gráfico da direita mostra um zoom, para a melhor identificação da diferença entre as curvas	34
4.6	Entradas (lado esquerdo) e Saídas (lado direito), para o sistema não-linear de segunda ordem	34
4.7	Saídas originais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por ruído branco, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante entrada aleatória, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra	35
4.8	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de expansão em funções de Laguerre , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco gaussiano	35
4.9	Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem, é importante mencionar que o zoom (figura direita) para a visualização da diferença entre os gráficos foi considerável	36
4.10	Saídas reais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por ruído branco, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante entrada aleatória, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra	37
4.11	Entradas alternativas ao ruído Branco, e suas respectivas correlações (à direita). Usa-se uma onda quadrada com ruído adicionado e uma senoide com aumento de frequência exponencial	38
4.12	Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda quadrada	38
4.13	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo onda quadrada com ruído	39
4.14	Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda senoide	39
4.15	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo senoide	40
4.16	Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem, (é importante mencionar que o zoom para a visualização da diferença entre os gráficos foi considerável), o sistema foi obtido com uma onda quadrada	40

4.17	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo onda quadrada com ruído	41
4.18	Saídas reais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda quadrada, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante onda quadrada, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra	41
4.19	Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem, (é importante mencionar que o zoom para a visualização da diferença entre os gráficos foi considerável), o sistema foi aqui modelado com uma senoide	42
4.20	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo senoide	42
4.21	Saídas reais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda senoide, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante entrada aleatória, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra	43
4.22	saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de terceira ordem	43
4.23	Kernels de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen , de um sistema não linear de terceira ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco	44
4.24	Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de terceira ordem	44
4.25	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , de um sistema não linear de terceira ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco	45
4.26	Diagrama de blocos para o sistema concebido, onde o sinal de entrada é a respiração do indivíduo , e o sinal de saída é o intervalo R-R do Eletrocardiograma	45
4.27	De cima pra baixo: sinal de entrada usado (respiração do indivíduo), autocorrelação do sinal de entrada, sinal interpretado como saída (intervalo R-R do Eletrocardiograma)	46
4.28	Saída real (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema real (relação respiração/intervalo R-R do ECG de um indivíduo)	46
4.29	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen ,para sistema real (relação respiração/intervalo R-R do ECG de um indivíduo)	47
4.30	Saída real (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema real (relação respiração/ intervalo R-R do ECG de um indivíduo)...	47

4.31	Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , sistema real (relação respiração/ ECG de um indivíduo)	47
------	--	----

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e objetivos do trabalho

Muito se estuda, na literatura da engenharia, os sistemas lineares. Os livros mostram como identifica-los, simula-los, ou fazer seu controle, no entanto, vale lembrar, que nenhum sistema físico é realmente linear. Os sistemas podem ter um comportamento mais próximo do linear, ou menos próximo. O resistor, por exemplo, exibe comportamento linear na maior parte da sua extensão, mas dependendo da temperatura, pode entrar em região não-linear. Nos sistemas biológicos, por exemplo, a administração de uma droga pode ter um efeito em um determinado momento, e um efeito completamente diferente em outro. Além disso, um sistema biológico pode ter um desempenho que depende de um número, talvez muito grande de variáveis. Diante disso, a abordagem em sistemas lineares pode ser completamente inadequada em numerosos casos. Assim faz-se necessário o estudo de modelamentos de sistemas não sejam lineares.

A metodologia de modelamento é tão diversa quanto as suas utilidades. O modelamento matemático serve para simular um sistema físico, poder prever os seus resultados mediante uma entrada desejada, poder servir também para projetar um sistema de controle, e outras muitas aplicações. Os métodos mais conhecidos de modelamento são os seguintes : o da caixa branca e o da caixa preta. Quando trabalha-se por caixa branca, analisa-se os fenômenos e chega-se ao comportamento do sistema a partir de uma cadeia dedutiva a partir dos axiomas, ou os princípios primeiros da física, química, biologia, ou das demais ciências. Já a metodologia por caixa preta, analisa apenas as entradas e saídas, e constrói-se o sistema a partir delas.

O objetivo do presente trabalho é a abordagem do método em caixa preta, estudando uma ferramenta poderosa para a construção de modelos que sejam não-lineares : a série de Volterra. Além disso serão estudado dois dos seus mais famosos métodos de resolução: o algoritmo de correlação cruzada de Lee-Schetzen e o método de expansão dos kernels pelas funções de Laguerre. O trabalho também versará sobre a comparação entre os dois métodos, qual produz as melhores e mais próximas estimativas.

Capítulo 2

Background

2.1 Introdução

Para a utilização das séries de Volterra, faz-se necessário o desenvolvimento teórico de conceitos e ferramentas matemáticas adjacentes, visto estabelecer os princípios de que construirão os vários parâmetros da série. É precisamente nesse sentido que se trata o presente capítulo. Os conceitos abordados tem função introdutória ao assunto. O ferramental teórico foi construído partir dos livros dos professores David T. Westwick e Robert E. Kearney, *Identification of NonLinear Physiological Systems*, [1].

2.2 Representação Matricial de Sinais

Como, usualmente, trabalha-se com sinais sempre em um contexto discretizado, é razoável entendê-los como vetores de n dimensões, onde o número de dimensões é igual ao número de amostras do sinal. Esta abordagem é útil, pois permite trabalhar com o sinal computacionalmente, e nesse modo pode-se manipular os vetores a partir de ferramentas matemáticas matriciais. Assim um sinal amostrado com n amostras fica:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & s(3) & \cdots & s(n) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{s} é o sinal em questão.

Para definir um número ótimo de amostras, usa-se o teorema de Nyquist, onde a frequência de amostragem deve ser pelo menos duas vezes maior que a banda do sinal em questão.

$$f_s \geq 2B \quad (2.2)$$

onde f_s é a frequência de amostragem, e B é a banda do sinal.

2.3 Correlação e Covariância

Uma vantagem da abordagem discretizada de sinais é a melhor utilização da ferramenta do produto interno. Vetorialmente, consegue-se o produto interno de dois vetores, multiplicando-os termo a termo e somando os produtos. Multiplicar, termo a termo, os componentes de dois sinais com mesmo número de amostras faz-se obter de forma indireta a medida da projeção de um sinal em um outro. Com essa medida, pode-se ter ideia do quão dois sinais em questão são parecidos.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix} \\ &= x(1)y(1) + x(2)y(2) + \cdots + x(N)y(N) \\ &= \sum_{n=1}^N x(n)y(n)\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde N é o número de elementos dos sinais $x(n)$ e $y(n)$.

Quanto maior o resultado do produto interno de dois vetores, tanto maior é a proximidade entre os dois sinais representados por tais vetores. A situação extrema é quando o produto interno retorna zero. Neste caso pode-se dizer que os vetores são perfeitamente ortogonais, ou que os sinais não tem nenhuma projeção, ou relação entre si.

O conceito de função de correlação parte expressamente da ideia sugerida pelo produto interno, com a diferença de que esta última é normalizada. Neste caso a função de correlação no ponto zero é dada pela equação 2.4:

$$\Phi_{xy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)y(n)\tag{2.4}$$

$\Phi_{xy}(0)$ é a correlação cruzada entre x e y , e N o número de termos desses vetores.

Já a função de correlação para um ponto qualquer τ é obtida transladando algum dos sinais para um atraso τ .

$$\Phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)y(n - \tau)\tag{2.5}$$

Como a função dada pela equação 2.5 é obtida a partir de dois sinais, ela é chamada de função de correlação cruzada. A correlação cruzada possui uma importante propriedade:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_{yx}(-\tau)\tag{2.6}$$

Também é possível medir a relação entre um sinal e suas versões atrasada (ou adiantada).

Nesse segundo caso, estamos a falar da função de autocorrelação, ela é construída a partir da equação 2.7:

$$\Phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x(n-\tau) \quad (2.7)$$

$\phi_{xx}(\tau)$ é a auto correlação do vetor x , para um atraso τ .

Já a função de covariância difere da função de correlação apenas por subtrair a média dos sinais. Faz-se isso em razão de uma desimportância dos componentes de corrente continua na presente abordagem de identificação de sistemas, ficando a função de covariância cruzada na seguinte forma:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x(n) - \mu_x)(y(n - \tau) - \mu_y) \quad (2.8)$$

onde $C_{xy}(\tau)$ é a covariância e as médias de x e y são iguais a μ_x e μ_y respectivamente. Já a auto covariância fica na forma:

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x(n) - \mu_x)(x(n - \tau) - \mu_x) \quad (2.9)$$

em que $C_{xx}(\tau)$ é a auto covariância.

Há ainda o coeficiente de correlação cruzada entre dois sinais:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \quad (2.10)$$

$r_{xy}(\tau)$ é o coeficiente de correlação.

Esse coeficiente assume o valor unitário somente se os sinais são proporcionais entre si; caso os sinais sejam ortogonais ele assume o valor zero. [1]

2.3.1 Funções de correlação e covariância e suas relações com o ruído

Uma adversidade em identificação de sistemas, é a inevitabilidade do ruído, tal irregularidade é inerente aos sistemas físicos. Existem técnicas que permitem até uma diminuição significativa da razão sinal ruído, como por exemplo o aumento da potencia do sinal, ou o aumento de potência das componentes de frequência específicas do sinal, ou mesmo a diminuição da potencia do ruído[2]. No entanto, a anulação completa do ruído é praticamente impossível, por isso mesmo ele é sempre considerado na modelagem matemática de identificação de sistemas.

Frequentemente as funções de auto correlação e correlação cruzada precisam ser estimadas segundo amostragens corrompidas, daí faz-se importante um estudo de como o ruído pode afetar essas funções. Sejam $x(t)$ e $y(t)$ dois sinais que precisam ser estimados a partir de amostragens com ruído $w(t)$ e $z(t)$:

$$w(t) = x(t) + n(t)$$

$$z(t) = y(t) + v(t)$$

onde $n(t)$ e $v(t)$ são os respectivos ruídos, a função de auto correlação de z será:

$$\begin{aligned}\Phi_{zz}(\tau) &= E[y(t-\tau) + v(t-\tau)](y(t) + v(t)) \\ &= \Phi_{yy}(\tau) + \Phi_{yv}(\tau) + \Phi_{vy}(\tau) + \Phi_{vv}(\tau)\end{aligned}$$

Como a correlação entre um sinal e o ruído é sempre zero, visto que o ruído é por definição aleatório e sua consequente relação com qualquer sinal é sempre aleatória, obtém-se a seguinte relação:

$$\Phi_{zz}(\tau) = \Phi_{yy}(\tau) + \Phi_{vv}(\tau) \quad (2.11)$$

Pode-se concluir que a função de auto correlação é afetada pelo ruído. Fazendo agora o mesmo raciocínio para a função de correlação cruzada chega-se às equações:

$$\begin{aligned}\Phi_{wz}(\tau) &= E[x(t-\tau) + n(t-\tau)](y(t) + v(t)) \\ &= \Phi_{xy}(\tau) + \Phi_{xv}(\tau) + \Phi_{yn}(\tau) + \Phi_{nv}(\tau)\end{aligned}$$

Pelo raciocínio já usado, pode-se constatar que:

$$\Phi_{wz}(\tau) = \Phi_{xy}(\tau) \quad (2.12)$$

Em outras palavras, o ruído não afeta a medição da correlação cruzada entre dois sinais.

2.4 Domínio da Frequência

Quando se quer descrever o comportamento de uma função no domínio frequencial usa-se, em geral, a transformada de Fourier. Essa transformada é uma ferramenta que modulará uma somatória de senoides, em passos infinitesimais, ou, em outros termos, uma integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{j\omega t} dw \quad (2.13)$$

em que $F(\omega)$ é a função que modula a senoide complexa $e^{j\omega t}$.

Trabalhar com a abordagem em domínio da frequência é bastante útil. Os modelos matemáticos lineares abordados no presente trabalho são pensados como funções que, no domínio da frequência, modulam uma entrada para obter uma saída:

$$X(f)H(f) = Y(f) \quad (2.14)$$

Da equação 2.14, se $X(f)$ é a entrada, e $Y(f)$ a saída, $H(f)$ é a função matemática usada para modelar o sistema em questão. Diz-se que um dado sistema é linear quando satisfaz os princípios da superposição e da proporcionalidade, representados respectivamente pelas seguintes equações 2.15 e 2.16:

$$f(w_1 + w_2) = f(w_1) + Y(w_2) \quad (2.15)$$

$$f(cw) = cf(w) \quad (2.16)$$

Pode-se aplicar as equações 2.15 e 2.16 e verificar que o sistema descrito pela equação 2.14 é linear:

$$\begin{aligned} Y(X_1(f) + X_2(f)) &= (X_1(f) + X_2(f))H(f) \\ &= X_1(f)H(f) + X_2(f)H(f) \\ &= Y(X_1) + Y(X_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(cX(f)) &= (cX(f))H(f) \\ &= c(X(f)H(f)) \\ &= cY(X) \end{aligned}$$

Os primeiros métodos de identificação de sistemas abordados aqui se utilizam precisamente dos conceitos de sistema linear descrito por função no domínio da frequência (modulação de uma entrada para gerar uma saída) e de auto correlação e correlação cruzada no domínio da frequência. Essas duas funções são conhecidas como auto espectro de potência, e espectro de potência cruzado, em outros termos, consistem nas transformadas de Fourier das correlações:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.17)$$

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.18)$$

em que S_{xx} é o auto espectro de potencia, e S_{xy} o espectro de potencia cruzado. No contexto do domínio do tempo discreto tornam-se:

$$S_{xx}(f) = \sum_{\tau=0}^N \Phi_{xx}(\tau) e^{\frac{-j2\pi f\tau}{N}} \quad (2.19)$$

$$S_{xy}(f) = \sum_{\tau=0}^N \Phi_{xy}(\tau) e^{\frac{-j2\pi f\tau}{N}} \quad (2.20)$$

A partir da equação 2.6, deduz-se uma importante propriedade do espectro de potencia cruzado. Seja $\mathfrak{F}(f)$ a transformada de Fourier para uma função qualquer f :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\Phi_{xy}(\tau)) &= \mathfrak{F}(\Phi_{yx}(-\tau)) \\ S_{xy}(f) &= S_{yx}(-f)\end{aligned}$$

Mas como o espectro de potencia é sempre positivo, e simétrico com relação a origem, obtém-se:

$$S_{xy}(f) = S_{yx}(f) \quad (2.21)$$

Essas funções complexas são úteis para descrever a interdependência de x e de y no domínio da frequência. Desse modo, se, por exemplo, uma correlação for nula (como o caso: $\Phi_{yy}(\tau) = 0$) o espectro de potencia relacionado será igualmente nulo ($S_{yy}(\tau) = 0$). Se, por sua vez, as equações que descrevem o espectro de potencia forem expandidas (equações 2.17 e 2.18), substituindo os termos $\Phi_{xx}(\tau)$ e $\Phi_{xy}(\tau)$, pelas suas expressões equivalentes obtém-se:

$$\begin{aligned}S_{xx}(f) &= \sum_{\tau=0}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)x(n-\tau) \right) e^{-\frac{j2\pi f\tau}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^N x(n-\tau) e^{-\frac{j2\pi f(n-\tau)}{N}} \sum_{n=1}^N x(n) e^{-\frac{j2\pi f\tau}{N}} \\ &= \frac{1}{N} X^*(f) X(f)\end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}S_{xy}(f) = S_{yx}(f) &= \sum_{\tau=0}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n)x(n-\tau) \right) e^{-\frac{j2\pi f\tau}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^N x(n-\tau) e^{-\frac{j2\pi f(n-\tau)}{N}} \sum_{n=1}^N y(n) e^{-\frac{j2\pi f\tau}{N}} \\ &= \frac{1}{N} X^*(f) Y(f)\end{aligned} \quad (2.23)$$

O simbolo $*$ foi usado para denotar o conjugado complexo do sinal em questão.

Com as equações 2.22 e 2.23 e também a equação 2.14 é possível ter ideia de como modelar um sistema a partir, apenas do auto espectro de potencia da entrada, e do espectro de potencia cruzado entre a entrada e a saída:

$$\frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)} = \frac{\frac{1}{N} X^*(f) Y(f)}{\frac{1}{N} X^*(f) X(f)} = \frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) \quad (2.24)$$

onde $H(f)$ é a função que modela o comportamento do sistema que se quer estudar

2.5 Estimando a resposta ao impulso

A função $H(f)$, em geral, chama-se de resposta em frequência do sistema, e essa função é a transformada de Fourier da resposta do sistema ao impulso $\delta(t)$, que é definido pelas seguintes relações:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0, \\ \infty, & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

além disso;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.26)$$

A partir das relações dadas pelas equações 2.25 e 2.26 constata-se que o impulso é muito difícil de ser conseguido fisicamente, pois os sistemas físicos não dispõem de sinais com amplitude infinita, ao mesmo tempo de uma largura infinitesimal. Isso já impossibilita a viabilidade de uma medição direta da resposta ao impulso (tomar o impulso como entrada e verificar a saída)[2]. Além disso os sistemas físicos em geral apresentam algum nível de ruído. Então o que se pode fazer é limitar superiormente o impulso, alargar a sua duração no tempo, e aplicar filtros para a máxima atenuação do ruído branco.

Um jeito de analisar a resposta ao impulso é utilizar-se da ferramenta da correlação. Para isso faz-se necessária a análise do diagrama de malha aberta, figura 2.1 [1]:

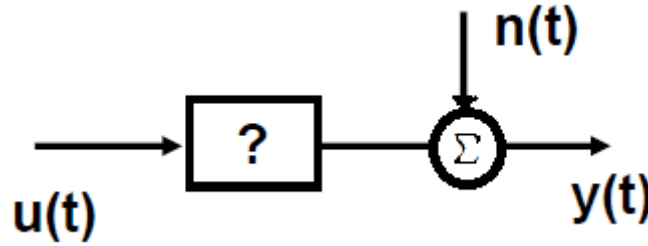


Figura 2.1: Diagrama de blocos para identificação de sistema em malha aberta

No diagrama da figura 2.1 é mostrado um modelo simples para identificar um sistema. Nele é aplicada uma entrada $u(t)$ e observada uma saída $y(t)$, verifica-se por meio da figura que a saída é modelada como tendo sido corrompida por um ruído $n(t)$. Esse modelo pode ser ainda representado pela equação 2.27:

$$y(t) = n(t) + \int_{-\infty}^{\infty} h(t')u(t-t')dt' \quad (2.27)$$

multiplicando os termos por $u(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}
u(t - \tau)y(t) &= u(t - \tau)n(t) + \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)u(t - t')dt' \\
\phi_{uy}(\tau) &= \phi_{un}(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\phi_{uu}(t' - \tau)dt'
\end{aligned}$$

No domínio da frequência:

$$S_{uy}(f) = S_{un}(f) + S_{uu}(f)H(f) \quad (2.28)$$

Como não há correlação entre a entrada e o ruído adicionado $n(f)$, tem-se $S_{un}(f) = 0$ para todo f , então chega-se a:

$$H(f) = \frac{S_{uy}(f)}{S_{uu}(f)} \quad (2.29)$$

Essa equação mostra o primeiro método de identificação de sistemas a partir da função de correlação. Ela em geral fornece uma estimativa com uma boa aproximação da resposta ao impulso, no entanto pode ser aprimorado pelo método de Welch.

2.5.1 Método de Welch

O método de Welch fundamenta-se em dividir a informação em múltiplos segmentos, calcular a densidade espectral para cada um desses segmentos e em seguida fazer a média de todos [2]: A ideia básica desse método é que cada um dos segmentos possuirá o mesmo conteúdo de frequência, então as várias densidades espectrais serão muito parecidas entre si: conterão a mesma informação. Quando calcula-se a média, pode-se reduzir o efeito do ruído na estimativa do sistema, reduzindo o valor da sua variância.

$$\hat{S}_{uu}(f) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D S_{uu_d}(f) \quad (2.30)$$

\hat{S}_{uu} é a soma das densidades espectrais dos vários segmentos.

2.5.2 Método para sistemas em malha fechada

A figura 2.2, mostra um sistema em malha fechada, em diagrama de blocos. Mostra-se então que não haverá a relação: $S_{un}(f) = 0$, pois evidentemente, o ruído influencia $U(f)$ tanto quanto $R(f)$, conseqüentemente $H(f) \neq \frac{S_{uu}(f)}{S_{uy}(f)}$. A solução para este caso é simplesmente usar $R(f)$ ao invés de $U(f)$, pois o sistema se comportará semelhantemente a figura 2.1 e, além disso: $S_{rn}(f) = 0$. Neste caso:

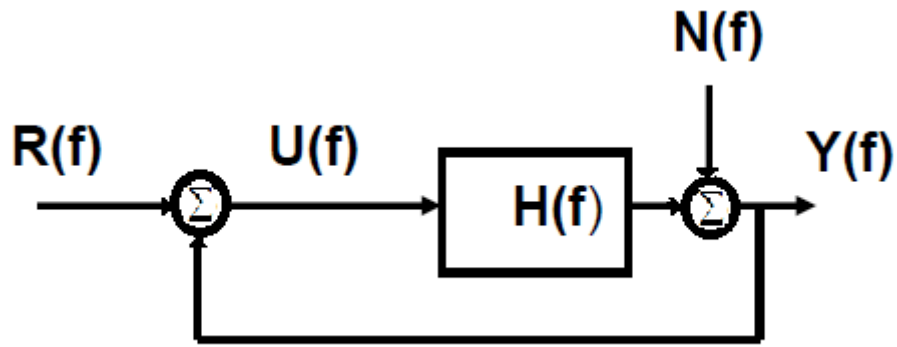


Figura 2.2: Diagrama de blocos para identificação de sistema em malha fechada

$$\hat{H}_{uy}(f) = \frac{S_{ry}(f)}{S_{ru}(f)} \quad (2.31)$$

Aqui a equação 2.31 fornece uma estimativa para o cálculo de $H(f)$. Onde $u(t)$ pode ser calculado como $y(t) + r(t)$

Capítulo 3

Introdução à série de Volterra

3.1 Sistema não linear

As equações de identificação de sistemas vistas até o presente capítulo mostram sistemas modelados pelas suas respostas ao impulso. No entanto a forma apresentada por essas equações vale apenas para sistemas lineares. Um caso diferente seria o da equação 3.1:

$$Y(f) = H(f)X(f)^2 \quad (3.1)$$

Aplicando a ela (equação 3.1) as propriedades da linearidade tem-se:

$$\begin{aligned} Y(X1(f) + X2(f)) &= (X1(f) + X2(f))^2 H(f) \\ &= X1^2(f)H(f) + X2^2(f)H(f) + 2X1(f)X2(f)H(f) \\ &= Y(X1(f)) + Y(X2(f)) + X1(f)X2(f)H(f) \\ &\neq Y(X1(f)) + Y(X2(f)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(cX(f)) &= (cX(f))^2 * H(f) \\ &= c^2(X^2(f) * H(f)) \\ &= c^2Y(X(f)) \\ &\neq cY(X(f)) \end{aligned}$$

Pode-se concluir que o sistema descrito não é linear, diferentemente, possui termos quadráticos, e em vista disso, não pode ser descrito pelos métodos até agora abordados. Em vista disso é necessário a introdução de ferramentas que modelem os sistemas não lineares.

3.2 A equação da série de Volterra

Para modelar esse sistema, é preciso a utilização da seguinte equação:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.2)$$

onde a função $h(\tau_1, \tau_2)$ é a resposta ao impulso de segunda ordem do sistema [2]. A equação 3.2 descreve termos de segunda ordem no domínio do tempo, ela é o segundo termo da série de Volterra. A série completa fica:

$$\begin{aligned} y(t) = & h_0 + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando uma notação mais compacta:

$$\begin{aligned} H_1[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau + \\ H_2[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ H_n[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

ficando a série de Volterra:

$$y(t) = H_1[x(t)] + H_2[x(t)] + \cdots + H_n[x(t)] \quad (3.5)$$

Como a série aborda os termos de primeira ordem, segunda ordem, até a n-ésima ordem, a série pode descrever qualquer sistema não-linear, desde que possua termos e ordens suficientes para isso.

Assim, os sistemas não lineares não ficarão descritos apenas por uma função $h(t)$, mas por várias funções: $h_0, h_1(t), h_2(t_1, t_2), \dots$ que são chamados de kernels. É importante observar que os sistemas lineares são descritos apenas por $h_1(t)$, o kernel de primeira ordem, onde, no domínio do tempo assumem a forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (3.6)$$

Além disso o somatório dos vários kernels consiste na resposta ao impulso do sistema [2]. Por exemplo: se o sistema for de segunda ordem ele terá como resposta ao impulso $h_0 + h_1 + h_2$ ainda que os dois primeiros Kernels tenham valor nulo.

3.2.1 A série de Volterra finita

A série de Volterra é apresentada na literatura tanto em sua forma contínua, como em sua forma discreta[2],[1]. É possível calcular as integrais da série contínua usando a convolução e técnicas numéricas, no entanto é mais eficiente a utilização das séries na sua expressão discreta. A descrição matemática da série:

$$\begin{aligned} y(t) = & h_0 + \\ & \sum_{\tau=0}^{T-1} h_1(\tau)x(t-\tau) + \\ & \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \sum_{\tau_2=0}^{T-1} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) + \\ & \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \cdots \sum_{\tau_n=0}^{T-1} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3 A série de Wiener

As séries de Volterra, em identificação de sistemas possuem uma desvantagem: seus kernels, de diferentes ordens não são independentes entre si, o que dificulta sua determinação[2]. Wiener, quando estudou as séries de Volterra passou por tal desvantagem, e superou-a ortogonalizando os kernels[2]. Assim cada componente da série de Wiener é ortogonal aos componentes de ordem inferior, e desse modo é possível determinar os kernels de Wiener sequencialmente, e de forma independente.

A série de Wiener trabalha com um conjunto de operadores G_q , que opera sobre os kernels (denotados por $k_q(\tau_1, \dots, \tau_q)$) e a entrada $x(t)$, tal que:

$$y(t) = \sum_{q=0}^{\infty} G_q[k_q(\tau_1, \dots, \tau_q); x(t)] \quad (3.8)$$

Além disso os operadores $G_q[k_n; x(t)]$ são definidos de modo a sempre serem ortogonais a qualquer operador de Volterra de ordem inferior a n :

$$\langle H_m[x(t)]G_q[k_q; x(t)] \rangle = 0 \text{ para } m < n \quad (3.9)$$

onde as chaves " $\langle \dots \rangle$ " representam a média no tempo, de modo a determinar a expectância do produto entre H_m e G_q .

É importante mencionar aqui, também, as três principais diferenças entre a série de Wiener e a série de Volterra,[2]. A primeira delas é que a série de Volterra usualmente não inclui um termo de ordem zero, (pode-se definir tal termo como $H_0[x(t)] = h_0$), ao passo que a série de Wiener

sempre irá incluir um termo constante. Esse termo será a média aritmética do sinal de resposta e é igual ao primeiro kernel: k_0 .

$$G_0[k_0; x(t), t] = k_0 \quad (3.10)$$

A segunda grande diferença entre as duas séries é que a série de Volterra possui todos os seus operadores homogêneos, ao passo que as séries de Wiener possui operadores não homogêneos (os termos $k_{0(1)}$, $k_{1(2)}$, $k_{0(1)}$). O primeiro operador da série de Wiener é, por exemplo:

$$G_1[k_1; x(t), t] = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) x(t - \tau) d\tau + k_{0(1)} \quad (3.11)$$

Vemos aqui que diferentemente da série de Volterra que só possui o termo de primeira ordem, o operador de Wiener de ordem um, possui um termo de primeira ordem: k_1 , e um termo ordem zero: $k_{0(1)}$.

O operador de Wiener de segunda ordem é:

$$\begin{aligned} G_2[k_2; x(t), t] = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} k_{1(2)}(\tau) x(t - \tau) d\tau + k_{0(2)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

O operador de segunda ordem conta com o termo de segunda ordem k_2 , o termo de primeira ordem $k_{1(2)}$, e o termo de ordem zero $k_{0(2)}$. Assim o operador de Wiener também pode ser escrito como:

$$G_q[k_q; x(t)] = g_q[k_q, k_{q-1(q)}, \dots, k_{0(n)}; x(t)] \quad (3.13)$$

Para mostrar que não opera apenas sobre k_n , mas também sobre kerneis de ordens menores, do tipo $k_{n-q(n)}$.

A terceira maior diferença entre as duas séries é que no caso da série de Wiener usa-se sempre como entrada $x(t)$ o Ruído branco gaussiano. Faz-se isso para garantir que os operadores de Wiener sejam sempre ortogonais aos operadores de ordem inferior, [2].

3.3.1 Determinando os operadores de Wiener

Para determinar os operadores de Wiener, recorreremos a equação 3.9. Assim para o operador de primeira ordem teremos:

$$\begin{aligned} \langle H_0[x(t)] G_1[k_1; x(t), t] \rangle &= \langle h_0 g_1[k_1, k_{0(1)}; x(t)] \rangle = \\ \left\langle h_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) x(t - \tau) d\tau + k_{0(1)} \right) \right\rangle &= h_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) \langle x(t - \tau) \rangle d\tau + k_{0(1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Pela terceira propriedade mencionada, a entrada $x(t)$ é um ruído branco gaussiano, assim o termo $\langle x(t - \tau) \rangle$ é igual a zero, pois o ruído sempre tem média zero, e por conseguinte:

$$k_{0(1)} = 0 \quad (3.14)$$

O operador de Wiener de primeira ordem fica então com a forma:

$$G_1[k_1; x(t), t] = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (3.15)$$

Passando agora a determinar o operador de segunda ordem a partir também da equação 3.9, leva-se a relação: $\langle H_0[x(t)]g_2[k_2, k_{1(2)}, k_{0(2)}; x(t)] \rangle = 0$, e chega-se a:

$$\left\langle h_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} k_{1(2)}(\tau) x(t - \tau) d\tau + k_{0(2)} \right) \right\rangle =$$

$$h_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} k_{1(2)}(\tau) \langle x(t - \tau) \rangle d\tau + k_{0(2)} \right) = 0$$

Novamente, o termo $\langle x(t - \tau) \rangle$ é igual a zero, o que nos leva a equação 3.16:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 + k_{0(2)} = 0 \quad (3.16)$$

Aqui o termo $\langle x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \rangle$ pode ser simplificado para a auto correlação de x :

$$\langle x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \rangle = \phi_{xx}(\tau_2 - \tau_1) = \sigma^2 \delta(\tau_2 - \tau_1) \quad (3.17)$$

Simplificando então a equação 3.16:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 - 2 + k_{0(2)} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) \sigma^2 \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + k_{0(2)} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) \sigma^2 d\tau_1 + k_{0(2)} = 0 \quad (3.18)$$

Determina-se assim o kernel de ordem zero do operador de segunda ordem.

$$k_{0(2)} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 \quad (3.19)$$

Substituindo agora o kernel de Volterra de primeira ordem na equação 3.9, leva-se a relação $\langle H_1[x(t)]g_2[k_2, k_{1(2)}, k_{0(2)}; x(t)] \rangle = 0$, então chega-se a:

$$\left\langle H_1[x(t)] \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} k_{1(2)}(\tau) x(t - \tau) d\tau + k_{0(2)} \right) \right\rangle =$$

Essa equação leva a uma soma de três termos, o **primeiro** deles:

$$\left\langle \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)x(t-v)d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)k_2(\tau_1, \tau_2)\langle x(t-v)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \rangle dv d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.20)$$

Esse termo resulta em zero, visto que $\langle x(t-v)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \rangle$ resulta em zero, (produtos do mesmo tipo, com um número impar de entradas atrasadas gaussianas $x(t)$ resulta sempre em zero).

Já o **segundo** termo:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)x(t-v)d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_{1(2)}(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \right) \right\rangle &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)k_{1(2)}(\tau_1)\langle x(t-v)x(t-\tau_1) \rangle dv d\tau_1 &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)k_{1(2)}(\tau_1)\sigma^2\delta(v-\tau_1)dv d\tau_1 &= \\ \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)k_{1(2)}(\tau_1)dv d\tau_1 & \end{aligned} \quad (3.21)$$

E o **terceiro** termo:

$$\left\langle \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)x(t-v)d\tau \right) k_{0(2)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)\langle x(t-v) \rangle k_{0(2)} dv \quad (3.22)$$

Como $\langle x(t-v) \rangle$ resulta zero, todo o termo resulta também em zero. Assim o único termo que não resulta em zero é o segundo. Reescrevendo a equação para o produto entre o operador de primeira ordem de Volterra e o operador de segunda ordem de Wiener:

$$\langle H_1[x(t)]g_2[k_2, k_{1(2)}, k_{0(2)}; x(t)] \rangle = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v)k_{1(2)}(\tau_1)dv d\tau_1 = 0 \quad (3.23)$$

Assim o kernel de primeira ordem do operador de segunda ordem de Wiener resulta em zero:

$$k_{1(2)}(\tau_1) = 0 \quad (3.24)$$

A forma completa do operador de segunda ordem:

$$G_2[k_2; x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1)d\tau_1 \quad (3.25)$$

3.3.2 Determinando os kerneis de Wiener

À partir das expressões para os coeficientes de Wiener, faz-se necessário determinar tais coeficientes segundo os dados experimentais. Também pode-se determinar os coeficientes sequencialmente, já que é válida a ortogonalidade. Para todos os cálculos a entrada $x(t)$ é sempre um ruído branco gaussiano. A saída será:

$$z(t) = \sum_{q=0}^N G_q[k_q; x(t)] \quad (3.26)$$

O kernel de ordem 0 pode ser conseguido como:

$$\langle z(t) \rangle = \left\langle \sum_{q=0}^N G_q[k_q; x(t)] \right\rangle = k_0 \quad (3.27)$$

A determinação do kernel de ordem 1 é como segue:

$$\begin{aligned} \langle z(t)x(t-v_1) \rangle &= \left\langle \sum_{q=0}^N G_q[k_q; x(t)]x(t-v_1) \right\rangle \\ &= \langle G_0[k_0; x(t)]x(t-v_1) \rangle + \langle G_1[k_1; x(t)]x(t-v_1) \rangle + \\ &\quad \langle G_2[k_2; x(t)]x(t-v_1) \rangle + \dots \end{aligned}$$

O termo $\langle G_0[k_0; x(t)]x(t-v_1) \rangle = 0$ já que G_0 é uma constante e $\langle x(t-v_1) \rangle = 0$, já que $x(t)$ é um ruído gaussiano, possuindo, assim, média 0.

Já o termo com o operador de primeira ordem tem o desenvolvimento:

$$\langle G_1[k_1; x(t)]x(t-v_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) \langle x(t-\tau)x(t-v_1) \rangle d\tau$$

Como o termo $\langle x(t-\tau)x(t-v_1) \rangle$ é igual a $\sigma^2\delta(\tau-v_1)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle G_1[k_1; x(t)]x(t-v_1) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) \sigma^2 \delta(\tau-v_1) d\tau \\ &= \sigma^2 k_1(v_1) \end{aligned}$$

Onde, como já mencionado, σ é o desvio padrão do ruído branco. Os termos $\langle G_2[k_2; x(t)]x(t-v_1) \rangle + \dots$ são todos iguais a zero, pela propriedade definida pela equação 3.9. Verifica-se então como calcular o kernel de primeira ordem:

$$k_1(v_1) = \frac{1}{\sigma^2} \langle z(t)x(t-v_1) \rangle \quad (3.28)$$

Passa-se então à determinação do Kernel de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
\langle z(t)x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle &= \left\langle \sum_{q=0}^N G_q[k_q; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \right\rangle \\
&= \langle G_0[k_0; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle + \\
&\quad \langle G_1[k_1; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle + \\
&\quad \langle G_2[k_2; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle + \dots
\end{aligned}$$

O primeiro termo , de ordem zero fica:

$$\begin{aligned}
\langle G_0[k_0; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle &= k_0 \langle x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle \\
&= k_0 \sigma^2 \delta(v_1 - v_2)
\end{aligned}$$

Admite-se que $v_1 \neq v_2$ então:

$$k_0 \sigma^2 \delta(v_1 - v_2) = 0 \quad (3.29)$$

O segundo termo, de primeira ordem fica:

$$\begin{aligned}
\langle G_1[k_1; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau_1) \langle x(t-\tau_1)x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle d\tau_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

O resultado é 0 já que: $\langle x(t-\tau_1)x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle = 0$. Desenvolvendo agora o terceiro termo, de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
&\langle G_2[k_2; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2) \langle x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\quad -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) \langle x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle d\tau_1
\end{aligned}$$

Usando o teorema de Wick, [2], chega-se às seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&\langle G_2[k_2; x(t)]x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle = \\
&2\sigma^4 k_2(v_1, v_2) + \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) \delta(v_1 - v_2) d\tau_1 + \\
&\quad -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_1) \langle x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle d\tau_1
\end{aligned}$$

As duas integrais acima se cancelam mutuamente uma vez que a segunda integral é igual a primeira, o que expõe o termo de segunda ordem da série de Wiener:

$$k_2(v_1, v_2) = \frac{1}{2\sigma^4} \langle z(t)x(t-v_1)x(t-v_2) \rangle \quad (3.30)$$

3.4 Algoritmo de Lee - Schetzen

Uma possível abordagem para o cálculo dos Kernels da série de Wiener, é a utilização do algoritmo de Lee-Schetzen. Ele funciona a partir do conceito de correlação, e seu principio situa-se no fato de que a saída $y(t)$ é a soma das convoluções entre os kernels das várias ordens e $x(t)$, e que esses kernels podem ser obtidos através das funções de correlação. O algoritmo detalhado:

- O primeiro passo é estimar o kernel de ordem zero como a média da saída

$$k_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \quad (3.31)$$

- Subtrair k_0 de $y(t)$ para conseguir o resíduo de ordem zero $v_0(t)$

$$v_0(t) = y(t) - k_0 \quad (3.32)$$

- Estimar o kernel de primeira ordem como a correlação cruzada entre a entrada ($x(t)$) e o resíduo ($v_0(t)$)

$$k_1(\tau) = \frac{1}{N\sigma_u^2} \sum_{t=1}^N u(t-\tau)v_0(t) \quad (3.33)$$

- Computar a saída estimada do kernel de primeira ordem por convolução

$$\hat{y}^{(1)}(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} x(t-\tau)k_1(\tau) \quad (3.34)$$

- Computar o resíduo de primeira ordem $v_1(t)$

$$v_1(t) = v_0(t) - \hat{y}^{(1)}(t) \quad (3.35)$$

- Calcular o kernel de segunda ordem como a correlação cruzada de segunda ordem entre o resíduo de primeira ordem e entrada.

$$K_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2N\sigma_u^4} \sum_{t=1}^N x(t-\tau_1)u(t-\tau_2)v_1(t) \quad (3.36)$$

3.5 As expansões dos kernels de Volterra

O uso do algoritmo de Lee-Schetzen induz a alguns requisitos incontornáveis a cerca do sinal de entrada a ser usado para identificar o sistema. O principal é a restrição de que o sinal deve ser um ruído gaussiano. Na prática ruídos gaussianos perfeitos são muito difíceis de ser implementados fisicamente como entrada, principalmente em sistemas biológicos. O método da expansão de Laguerre, estudado pelo professor Vasilis Z. Marmarelis,[3],[4] tenta dar uma solução para este, e outros problemas relacionados ao método de Lee-Schetzen.

A metodologia de expansão atenua as dificuldades do método anterior porque compacta a representação dos kernels e evita a resolução das séries pelas médias de correlação, ao invés delas, é utilizado o algoritmo de mínimos quadrados.

A metodologia básica de expansão dos kernels de Volterra emprega uma base de L funções causais $b_j(\tau)$. Tais funções são definidas a partir da memória dos kernels. Essas funções podem ser entendidas como respostas ao impulso de filtros lineares. As respostas desses filtros a uma entrada $x(t)$, formam as funções $v_j(t)$, como mostra a equação 3.37 e a figura 3.1:

$$v_j(t) = \int_0^\mu b_j(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (3.37)$$

A saída $y(t)$ será dada pela forma da série de Volterra expandida, a saber:

$$y(t) = h_0 + \sum_{r=1}^Q \sum_{j_1=1}^L \cdots \sum_{j_r=1}^L a_r(j_1, \dots, j_r) v_{j_1}(t) \cdots v_{j_r}(t) \quad (3.38)$$

Aqui Q é a ordem do sistema, L é o número de funções de base ($b_j(\tau)$), e $a_r(j_1, \dots, j_r)$ são os coeficientes a serem determinados. Substituindo os termos $v_{j_r}(n)$ da equação 3.38 pela formula dada pela equação 3.37 obtêm-se:

$$y(t) = h_0 + \sum_{r=1}^Q \sum_{j_1=1}^L \cdots \sum_{j_r=1}^L a_r(j_1, \dots, j_r) \int_0^\infty b_{j_1}(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \cdots \int_0^\infty b_{j_r}(\tau_r)x(t-\tau_r)d\tau_r$$

em que o termo de ordem r da série de Volterra é dado por:

$$\sum_{j_1=1}^L \cdots \sum_{j_r=1}^L a_r(j_1, \dots, j_r) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty b_{j_1}(\tau_1) \cdots b_{j_r}(\tau_r)x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_r)d\tau_1 \cdots d\tau_r$$

Comparando com o termo de ordem r da série de Volterra não expandido:

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h_r(\tau_1, \dots, \tau_r)x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_r)d\tau_1 \cdots d\tau_r$$

Concluimos que o kernel de ordem r expandido é dado por:

$$h_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = \sum_{j_1=1}^L \cdots \sum_{j_r=1}^L a_r(j_1, \dots, j_r) b_{j_1}(\tau_1) \cdots b_{j_r}(\tau_r) \quad (3.39)$$

A equação 3.39 fornece a condição necessária e suficiente para que a série de Volterra possa ser expandida através da equação 3.38 para todo r , além disso a base $b_j(t)$ precisa ser completa para que a expansão dos kernels possa fornecer boas aproximações. O problema da estimativa dos kernels de Volterra fica então reduzido ao problema de determinação dos coeficientes de expansão.

Há ainda um termo ϵ que deve ser associado à equação 3.38 para contabilizar os erros inerentes ao processo de identificação do sistema, como o truncamento ou interferência de ruído. Além disso, se quisermos trabalhar no domínio do tempo discreto, a equação 3.38 deve ser alterada, ficando:

$$y(t) = c_0 + \sum_{r=1}^Q \sum_{j_1=1}^L \cdots \sum_{j_r=1}^L c_r(j_1, \dots, j_r) v_{j_1}(n) \cdots v_{j_r}(n) + \epsilon(n) \quad (3.40)$$

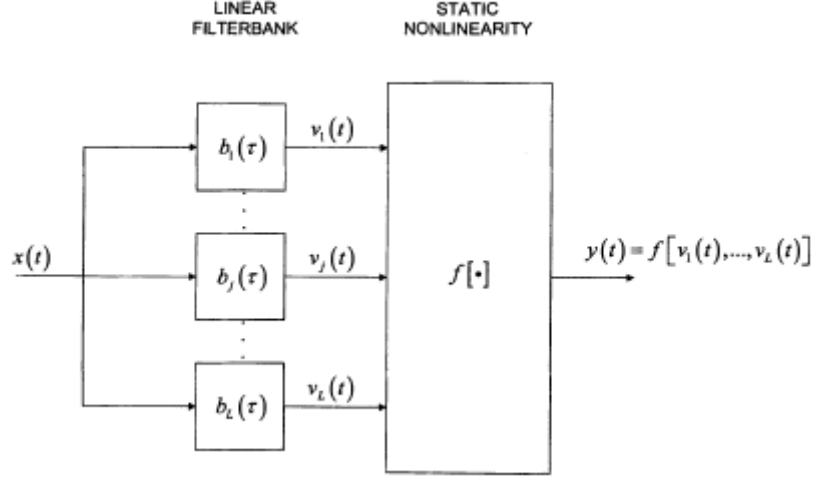


Figura 3.1: Diagrama de blocos para uma saída $y(t)$ modelada por vários filtros lineares $b_j(t)$, e uma não-linearidade $f(\bullet)$

Os coeficientes c_r são os coeficientes de expansão no tempo discreto e levam em conta as simetrias dos kernels de Volterra. As convoluções $v_j(t)$ em forma discreta ficam:

$$v_j(t) = T \sum_{m=0}^{M-1} b_j(\tau) x(n - \tau) \quad (3.41)$$

onde M é a largura de banda da memória do sistema e T é o intervalo de amostragem.

A equação 3.40 pode ainda ser escrita em termos matriciais, para a posterior resolução dos coeficientes de expansão via método dos quadrados mínimos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{c} + \epsilon \quad (3.42)$$

Na equação 3.42 \mathbf{y} é um vetor de n elementos que representa a saída usada para a identificação do sistema:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix}$$

Para o cálculo dos kernels de Volterra até a segunda ordem a matriz \mathbf{V} é uma justaposição de três matrizes $\mathbf{V0}$, $\mathbf{V1}$ e $\mathbf{V2}$:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V0} & \mathbf{V1} & \mathbf{V2} \end{pmatrix}$$

A matriz $\mathbf{V0}$ computa os termos referentes à ordem zero, a matriz $\mathbf{V1}$ computa os termos referentes à primeira ordem, e a matriz $\mathbf{V2}$ os termos referentes à segunda ordem. A matriz $(\mathbf{V0} \ \mathbf{V1})$ completa fica:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V0} & \mathbf{V1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v_1(1) & v_2(1) & \cdots & v_L(1) \\ 1 & v_1(2) & v_2(2) & \cdots & v_L(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_1(n) & v_2(n) & \cdots & v_L(n) \end{pmatrix}$$

Quanto a configuração da matriz $\mathbf{V2}$, que computa os termos de segunda ordem:

$$\mathbf{V2} = \begin{pmatrix} v_1^2(1) & v_2(1)v_1(1) & \cdots & v_L(1)v_1(1) & v_2^2(1) & v_2(1)v_3(1) & \cdots & v_L(1)v_{L-1}(1) & v_L^2(1) \\ v_1^2(2) & v_2(2)v_1(2) & \cdots & v_L(2)v_1(2) & v_2^2(2) & v_2(2)v_3(2) & \cdots & v_L(2)v_{L-1}(2) & v_L^2(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_1^2(n) & v_2(n)v_1(n) & \cdots & v_L(n)v_1(n) & v_2^2(n) & v_2(n)v_3(n) & \cdots & v_L(n)v_{L-1}(n) & v_L^2(n) \end{pmatrix}$$

A vetor \mathbf{c} computa os coeficientes de expansão:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1(1) \\ c_1(2) \\ \vdots \\ c_1(L) \\ c_2(1,1) \\ c_2(1,2) \\ \vdots \\ c_2(1,L) \\ c_2(2,2) \\ c_2(2,3) \\ \vdots \\ c_2(L-1,L) \\ c_2(L,L) \end{pmatrix}$$

Tanto o número de linhas de \mathbf{c} quanto o número de colunas de \mathbf{V} pode ser calculado por:

$$(L + Q)!/L!Q! \quad (3.43)$$

Onde L é o número de funções de base utilizado, e Q a ordem do sistema.

A equação 3.42 pode ser resolvida pelo método dos quadrados mínimos, diminuindo ao máximo o erro ϵ . Assim, para os coeficientes c_r :

$$\hat{\mathbf{c}} = [\mathbf{V}'\mathbf{V}]^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{y} \quad (3.44)$$

onde o sinal ' denota a matriz transposta

3.6 As Funções de Laguerre

Faz-se ainda necessário a determinação das bases de funções causais $b_j(\tau)$. Nesse sentido as funções de Laguerre mostraram-se ser a melhor base para descrever tais funções. Na verdade, as funções de Laguerre foram a sugestão original de Wiener para a expansão dos kernels de Volterra, por serem todas ortogonais entre si num domínio de zero a infinito, além disso as funções de Laguerre podem ser implementadas facilmente por via analógica, [4]. A fórmula para as funções de Laguerre é dada por:

$$b_j(m) = \alpha^{\frac{(m-j)}{2}} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{m}{k} \binom{j}{k} \alpha^{j-k} (1-\alpha)^k \quad (3.45)$$

Em que m é a largura de banda da memória do sistema, e α é um parâmetro que define a velocidade de decaimento dessas funções.

No entanto para o cálculo de $v_j(t)$ pode ser usada uma relação recursiva de modo a consumir menos processamento computacional.

$$v_j(n) = \sqrt{\alpha} v_j(n-1) + \sqrt{\alpha} v_{j-1}(n) - v_{j-1}(n-1) \quad (3.46)$$

Onde o primeiro termo, $v_0(t)$ é dado pela equação 3.47:

$$v_0(n) = \sqrt{\alpha} v_0(n-1) + T\sqrt{1-\alpha} x(n) \quad (3.47)$$

3.7 Os parâmetros de Laguerre

Para melhor utilização do método de Laguerre na identificação de sistemas, faz-se necessário o estudo de alguns parâmetros inerentes ao método, que são definidos à priori. Tais parâmetros irão dirigir toda a base de funções que farão a modelagem matemática. Por isso mesmo o presente trabalho faz uso dos estudos do professor Marmarelis sobre tais parâmetros [3],[4].

3.7.1 A influência da ordem das funções de Laguerre, na identificação dos Kernels de Volterra

A figura 3.2, mostra um total de cinco funções de Laguerre, para $\alpha = 0,2$. Nessa figura pode-se notar que o número de vezes que cada função corta o eixo x é exatamente igual à ordem da função. Ademais, quanto maior a ordem, menor é a atenuação dos valores expressivos da função. Pode-se

notar na figura 3.2 que a função de ordem zero (linha contínua) tem decaimento mais rápido que a de ordem cinco (linha pontilhada).

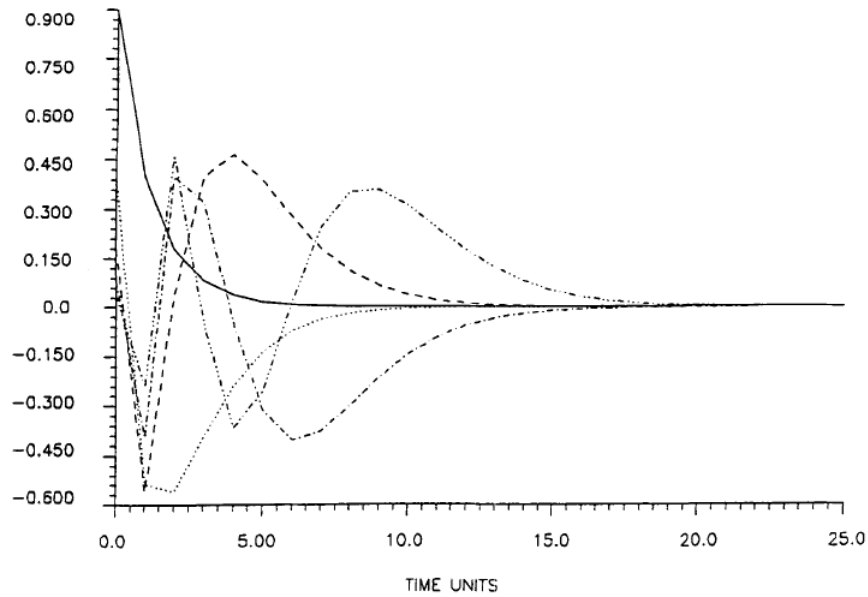


Figura 3.2: Funções de Laguerre em tempo discreto de ordens: 0 (linha sólida), 1 (pontilhada), 2 (tracejada), 3 (ponto e traço), 4 (ponto-ponto-ponto-traço), para $\alpha = 0, 2$. [3]

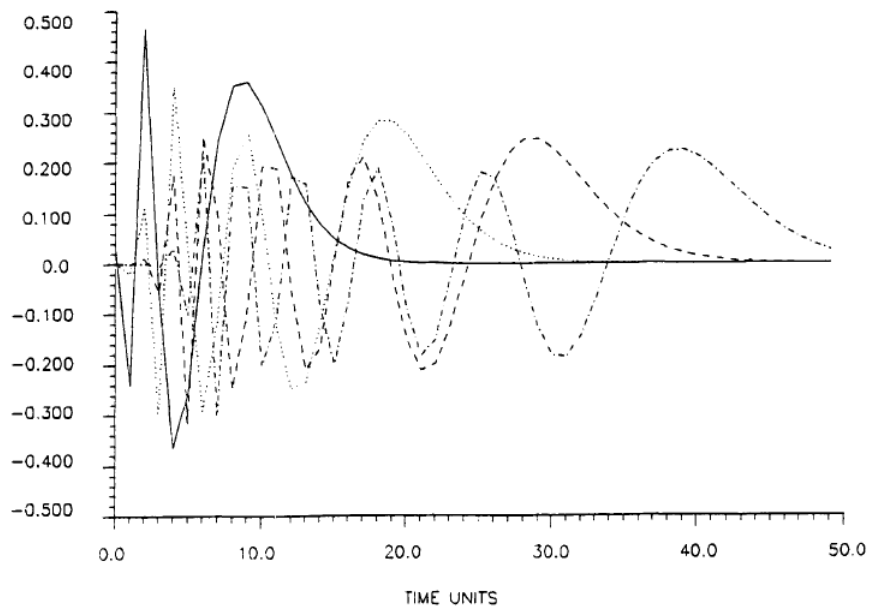


Figura 3.3: Funções de Laguerre em tempo discreto, de ordem 4(contínua), de ordem 8(pontilhada), de ordem 12(tracejada), de ordem 16(ponto-traço)

Esse comportamento é melhor ilustrado pela figura 3.3, onde há funções de Laguerre de ordens: 4, 8, 12 e 16. Nota-se que os valores significativos da função de ordem 16 perduram por mais tempo que os das funções de ordem inferior, tal como se os valores significativos tivessem a sua atenuação atrasada. Esta constatação implica que kernels com grande natureza de atraso, ou seja, deslocados

no eixo x positivamente, precisam de funções de Laguerre com ordens maiores.

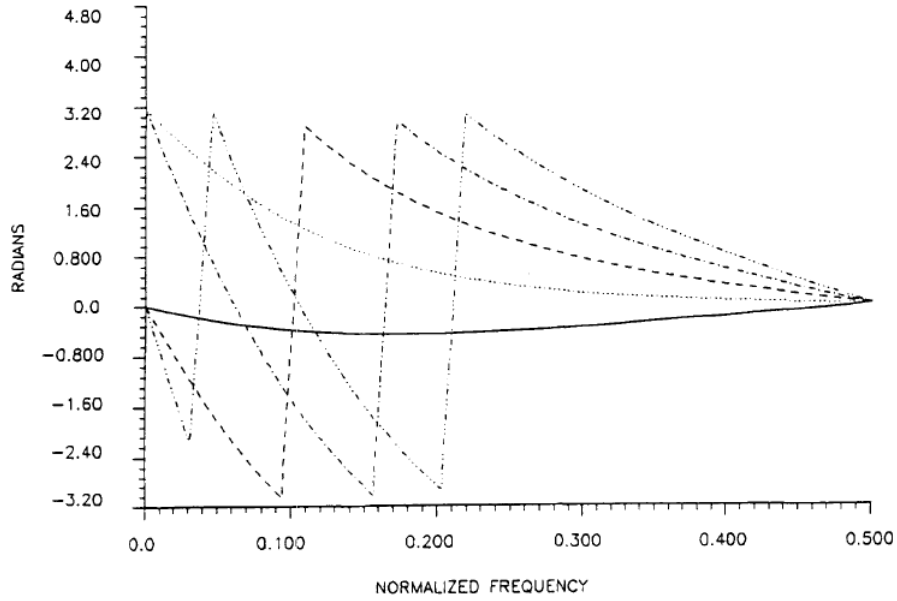


Figura 3.4: Gráfico das fases das transformadas de Fourier das cinco primeiras funções de Laguerre, (de ordem 0 até 4), para $\alpha = 0,2$, plotadas para a frequência de Nyquist normalizada de 0,5

A figura 3.4 mostra que para um mesmo α , as várias funções de Laguerre possuem um espectro de amplitude idêntico, variando apenas a fase. Nota-se que a fase é máxima para a função de maior ordem, e mínima para a de menor ordem.

3.7.2 A influência do parâmetro α

Para analisar a influencia do parâmetro α mantém-se constante a ordem dos polinômios de Laguerre e varia-se tal parâmetro. A figura 3.5 mostra a situação onde a ordem foi mantida em quarto grau e α foi variado em 0,1 , 0,2, e 0,4 . O que se pode ver é que a constante α tem uma propriedade de escalamento sobre as funções de Laguerre, tornando-as maiores em relação ao eixo do tempo. O parâmetro expressa então uma medida indireta da velocidade de decaimento dessas funções. Além disso também é possível perceber que α influencia na magnitude dos valores da função, de forma que estes diminuem quando se aumenta o parâmetro.

Já, tocando o domínio da frequência,(situação mostrada na figura 3.6) o que se pode perceber é que α possui um efeito de atenuante sobre os valores significativos da amplitude.

Inferre-se dos exemplos supracitados que o valor de α é escolhido de acordo com a memória do Kernel, de modo que as funções de Laplace cubram satisfatoriamente os efeitos de deslocamento no tempo.

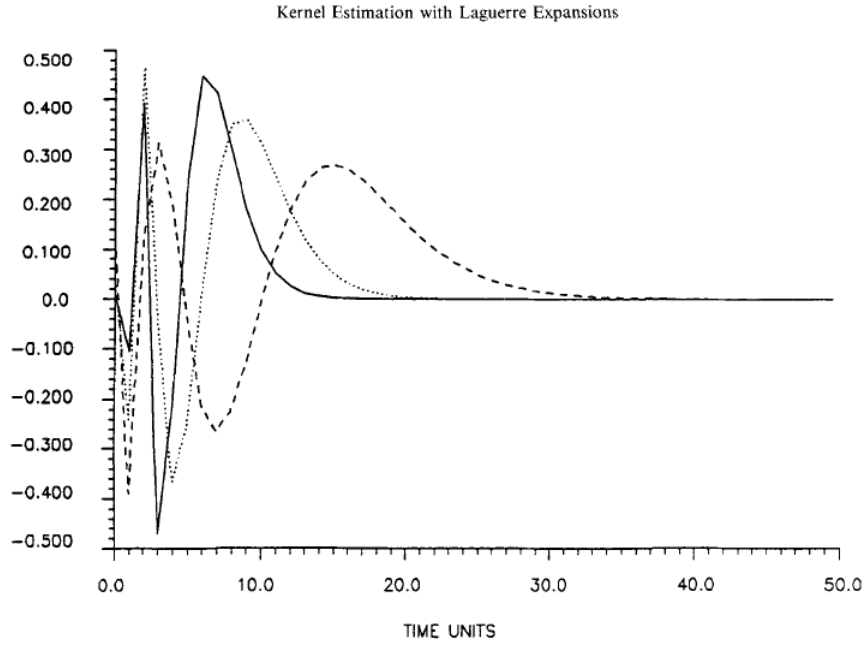


Figura 3.5: Função de Laguerre de quarta ordem, para $\alpha = 0,1$ (linha contínua), $\alpha = 0,2$ (tracejada), $\alpha = 0,4$ (pontilhada)

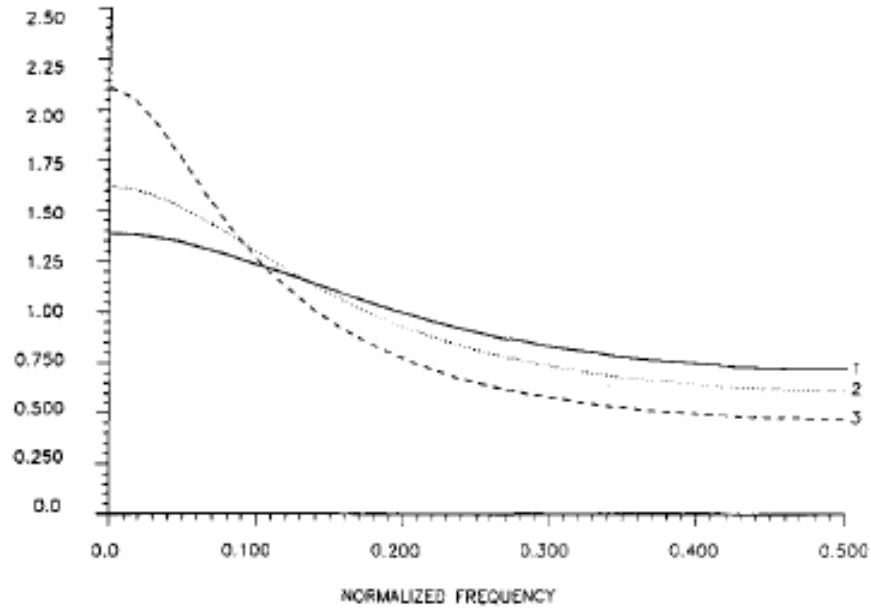


Figura 3.6: Magnitude da transformada de fourier da função de Laguerre de quarta ordem, para $\alpha = 0,1$ (traço 1), $\alpha = 0,2$ (traço 2), $\alpha = 0,4$ (traço 3)

3.7.3 A influência quanto ao número de pontos

A figura 3.7 mostra dois casos de simulação do Kernel de primeira ordem de um mesmo sistema. No primeiro caso (linha contínua) o sistema foi simulado utilizando o método de expansão via funções de Laguerre, já no segundo foi usado o método de Lee-Schetzen. A mostra conta com 512

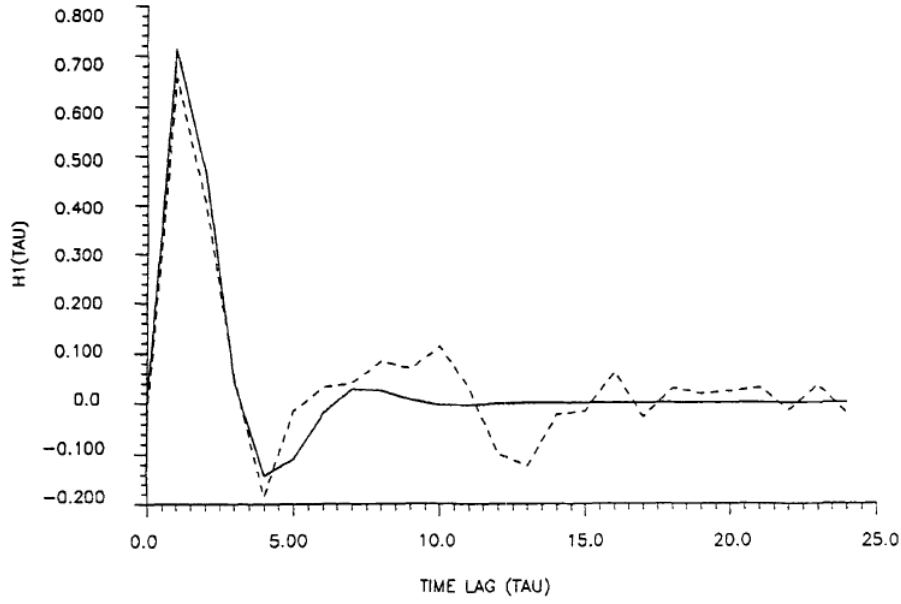


Figura 3.7: Estimativa do kernel de primeira ordem, obtido via método de Laguerre(linha contínua), via método de Lee-Schetzen(linha tracejada)

pontos. A linha de Laguerre é totalmente suave, ao passo que a linha do método de Lee-Schetzen exorbita de trepidação. Essa diferença também é visível na simulação do Kernel de segunda ordem mostrado pela figura 3.8.

Via de regra o número de coeficientes a serem determinados pelo método de Laguerre depende do número de funções de Laguerre L que se deseja utilizar. O primeiro kernel precisa de um número de coeficientes igual a L e o segundo kernel de $L(L+1)/2$.

Utilizar um número mínimo de pontos para simular os kernels de um sistema em questão é coisa importante, uma vez que tal abordagem implica em consumo menor de processamento computacional.

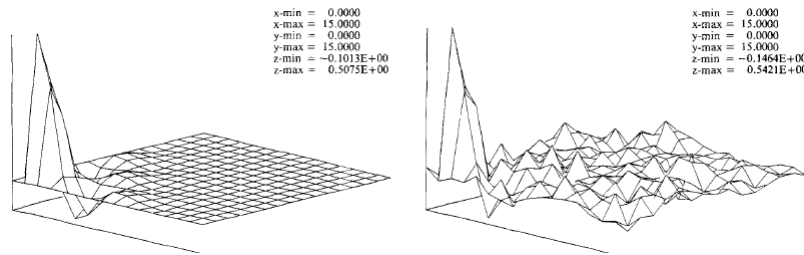


Figura 3.8: Simulação do Kernel de segunda ordem com método de Laguerre(esquerda), método de Lee-Schetzen(direita), utilizando 512 pontos

3.7.4 O efeito do ruído

Analisa-se agora a eficiência dos dois métodos quanto à capacidade de modelagem perante dados corrompidos com ruído. A figura 3.9 mostra a diferença na superação do ruído nos dois casos estudados (A curva contínua sendo a do método de Laguerre e a pontilhada o de Lee-Schetzen). O algoritmo de Laguerre mantém a sua suavidade, ao passo que o de Lee-Schetzen mantém trepidação.

A resolução do gráfico foi obtida a partir de uma amostra de 512 pontos, e de uma razão sinal-ruído de 10dB, e mostra um resultado vantajoso, do ponto de vista computacional, ou de aquisição de dados. As séries de Volterra e sua abordagem por Laguerre, mostram superioridade em relação a abordagem por Lee-Schetzen.

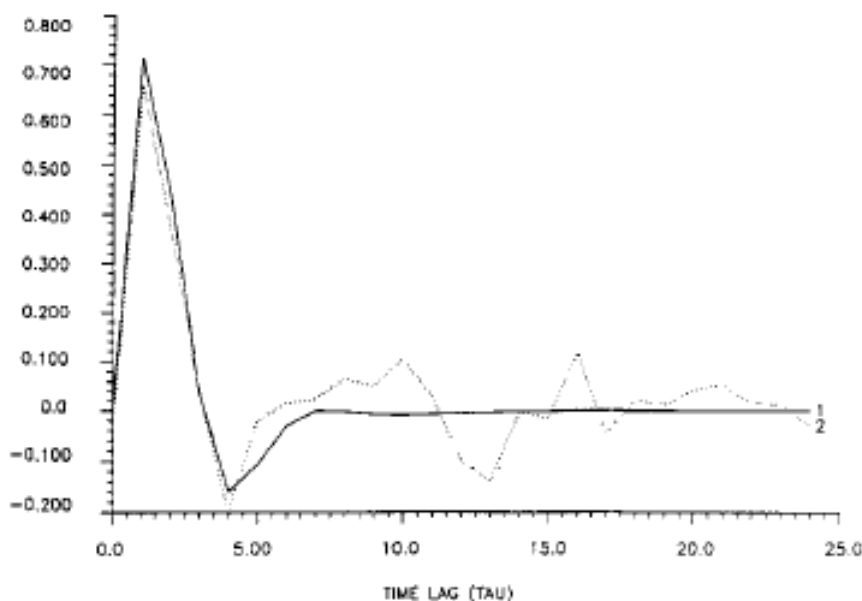


Figura 3.9: Kernel de primeira ordem, obtido com o método de Laguerre (linha contínua), e o método de Lee-Schetzen (linha tracejada), para dados com ruído

3.7.5 Entrada diferente do ruído branco gaussiano

Teoricamente as Séries de Volterra devem funcionar a partir do ruído branco gaussiano como dado de entrada. No entanto, vale lembrar que esse tipo de entrada pode ser difícil de se implementar na prática, e para uma abordagem de sistemas fisiológicos, por exemplo, tal entrada é muito difícil de se conseguir. Por isso é importante analisar tanto a técnica de Lee-Schetzen quanto a de Laguerre a partir de entradas que desviem do ruído branco gaussiano.

A figura 3.10 mostra o espectro de amplitude de um sinal não gaussiano. O kernel de primeira ordem referente a esse sinal é estudado na figura 3.11. De novo, resultados sempre suaves do método de Laguerre, enquanto o método de Lee-Schetzen, pela trepidação mostrada, evidencia a

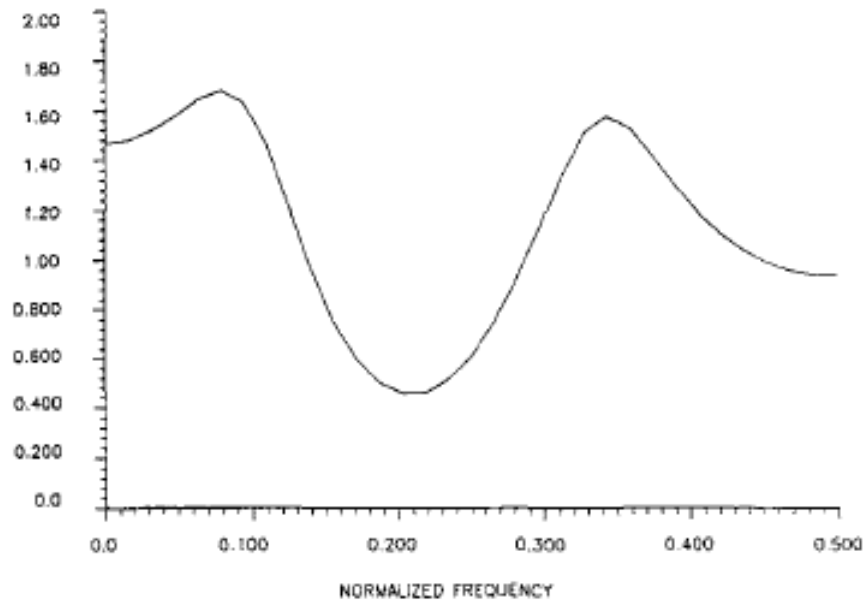


Figura 3.10: Espectro de amplitude de um sinal que diverge do ruído branco gaussiano introdução de erro. O mesmo vale para o kernel de segunda ordem simulado na figura 3.12.

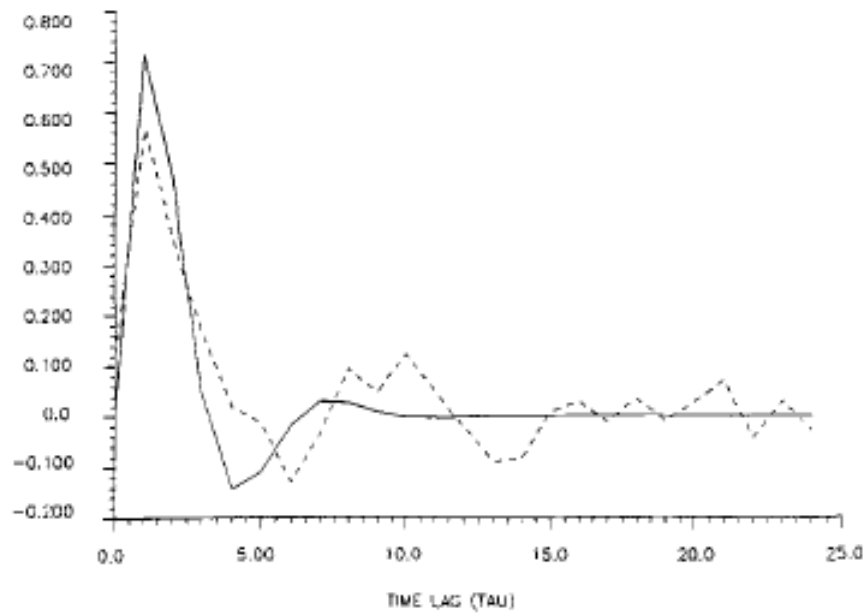


Figura 3.11: Kernel de primeira ordem para sinal que diverge do ruído branco gaussiano, método de Laguerre (linha contínua), método de Lee-Schetzen (linha tracejada)

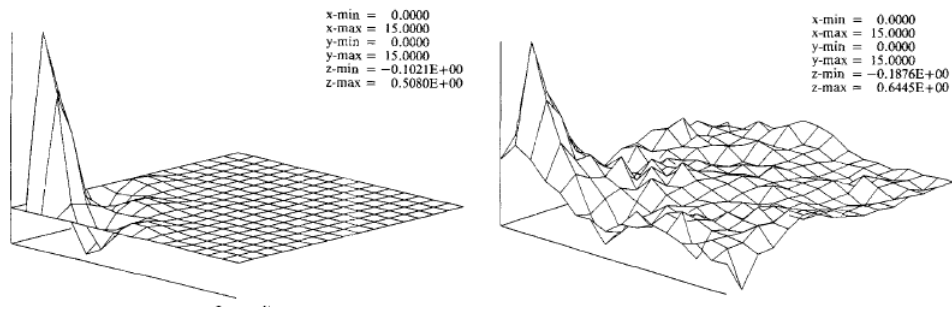


Figura 3.12: Kerneis de segunda ordem para sinal que diverge do ruído branco gaussiano, método de Laguerre (linha contínua), método de Lee-Schetzen (linha tracejada)

Capítulo 4

Simulações Computacionais e Estudo Comparativo

4.1 Introdução

Nesta seção será abordado o estudo comparativo entre os dois métodos de resolução das séries de Volterra através de simulações computacionais feitas pelo auxílio do software MATLAB. O ferramental é disponibilizado pelo professor Wim Van Drogelen, (anexo do seu livro *Signal Processing for Neuroscientists*, [2]), para a resolução da série de Volterra via método de Lee-Schetzen, e do Lysis, uma toolbox do professor Vasilis Z. Marmarelis. Esta comparação será feita por meio da observação do resultado das saídas estimadas do sistema e pela avaliação das figuras dos Kerneis obtidos com cada método.

4.2 Comparação a partir de entradas do tipo ruído branco gaussiano

4.2.1 Algoritmo de Lee-Schetzen

Foi estabelecido um sistema não linear. Esse consiste de um sistema linear em paralelo a um sistema quadrático. A parte linear do sistema consiste de um filtro passa baixa simples, modelado por um circuito RC. E a parte não linear consiste no mesmo circuito linear RC, porém, elevado ao quadrado. Esse modelo simples foi retirado do livro "Signal processing for neuroscientists" do prof. Van Drogelen, [2]. A figura 4.1 Mostra o sistema utilizado:

Em seguida, foi obtida uma saída a esse sistema para posterior comparação com uma saída estimada, mediante uma entrada de tipo ruído branco gaussiano. A figura 4.2, mostra a sobreposição entre essa saída e a entrada. Usa-se o ruído branco pois ele possui uma configuração de auto correlação semelhante a um impulso, a figura 4.3 mostra o gráfico dessa auto correlação.

Foram calculados também os Kerneis de primeira e segunda ordem para esse par de entrada e

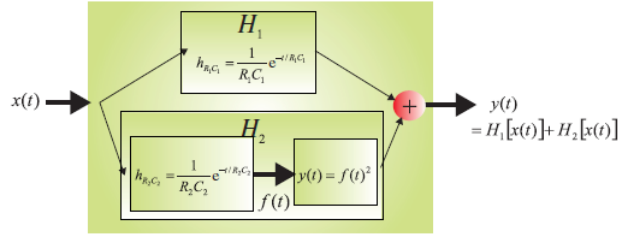


Figura 4.1: Diagrama de blocos do sistema não linear de segunda ordem, usado nas simulações

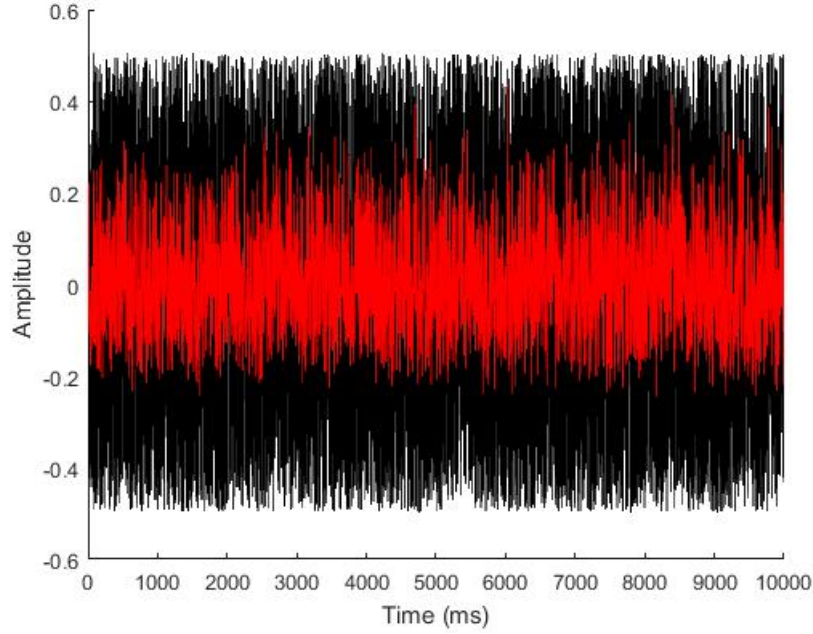


Figura 4.2: Entrada do tipo ruído branco(preto) e a respectiva saída (vermelho) de um sistema não-linear de segunda ordem

saída através do algoritmo de Lee-Schetzen, mostrados na figura 4.4.

A estimativa da saída é como mostrada na figura 4.5, Nesse gráfico a saída original obtida do próprio sistema está em vermelho e a estimativa usando os kernels de Volterra está em verde. O que se vê é que há pouca diferença entre as duas, o gráfico a direita ajuda a visualizar melhor a diferença. Podemos concluir que nessa situação específica, o algoritmo de Lee-Schetzen descreveu bem o comportamento do sistema.

A seguir foi testada a fidelidade do sistema estimado. A partir dos kernels de Volterra obtidos, foram feitas convoluções entre esses kernels e outros tipos de entrada, de modo a obter outras saídas estimadas, para posterior comparação com as saídas originais do sistemas. É esperado que os kernels de volterra modelem o sistema, aproximando a saídas estimadas pelos kernels das saídas originais do sistema. A figura 4.6, mostra as entradas usadas, e ao lado, as respectivas saídas do sistema. O primeiro gráfico é um sinal de tipo aleatório, o segundo é de um seno, e o terceiro , uma onda triangular do tipo dente de serra.

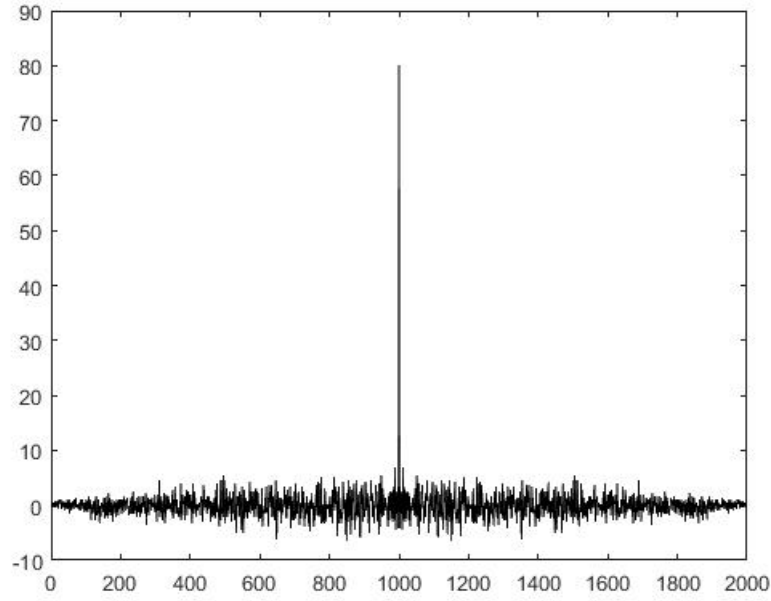


Figura 4.3: Auto correlação do ruído branco gaussiano

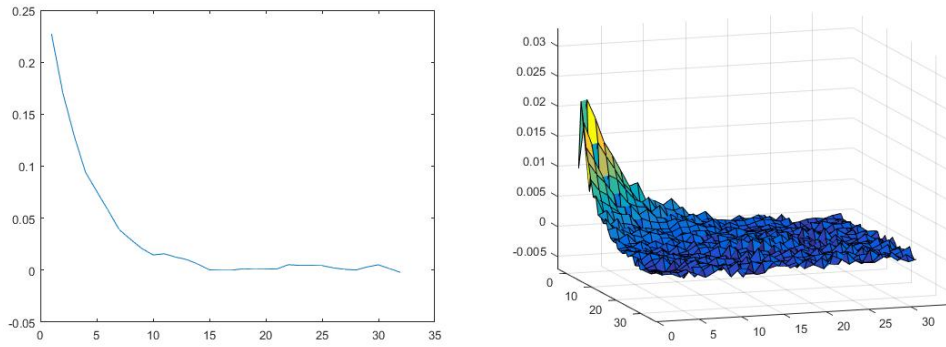


Figura 4.4: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtido via algoritmo de Lee-Schetzen, de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco gaussiano

As saídas estimadas são como mostradas na figura 4.7, onde estão em cor verde e em superposição às saídas originais do sistema (em vermelho). Nesse caso nota-se que o sistema está representado pelos kerneis de Volterra obtidos, com pouca diferença visível entre o estimado e o original.

4.2.2 Método de expansão via funções de Laguerre

Para o mesmo sistema não-linear de segunda ordem foi feita a obtenção dos kerneis de Volterra a partir da mesma entrada de tipo ruído branco gaussiano, no entanto, agora foi utilizado o método de Laguerre. Os parâmetros usados são: $\alpha = 0,7$, para garantir funções de Laguerre

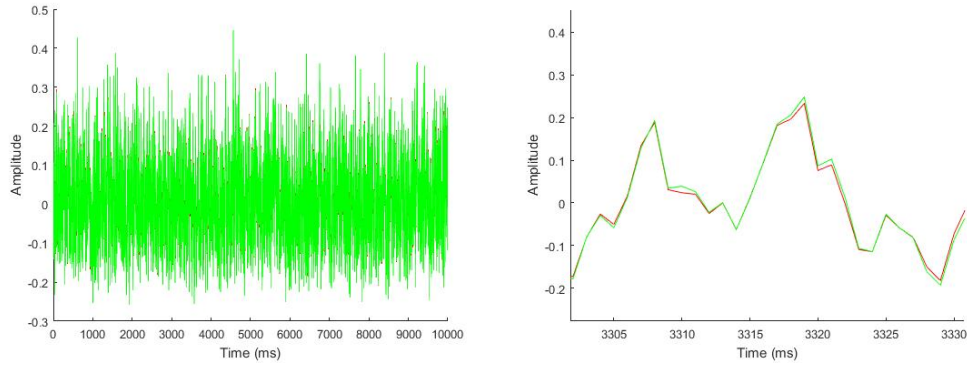


Figura 4.5: Saída original (vermelho), e saída estimada (verde) para uma estimativa usando o método de Lee-Schetezen, o gráfico da direita mostra um zoom, para a melhor identificação da diferença entre as curvas

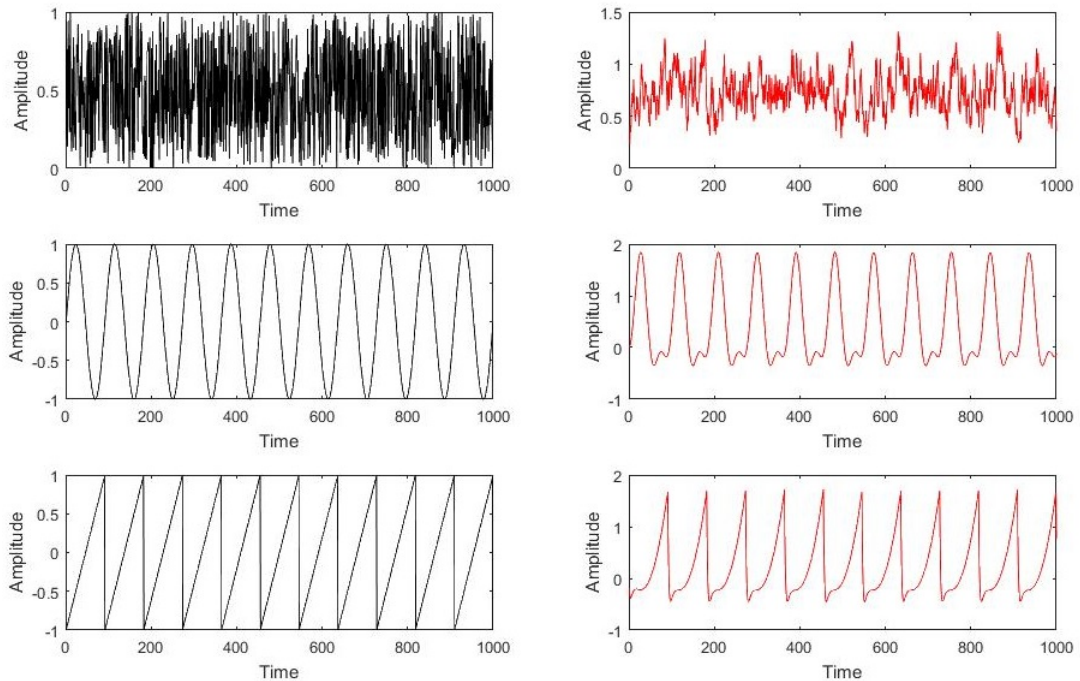


Figura 4.6: Entradas (lado esquerdo) e Saídas (lado direito), para o sistema não-linear de segunda ordem

com decaimento menor, e se o sistema requeresse decaimento, ele seria modelado pelo valor dos coeficientes de expansão de Laguerre. o número de funções de Laguerre = 9 para garantir uma boa base de funções para o método. A entrada e a saída originais desse sistema são exatamente como já mostrados na figura 4.2.

Os Kerneis obtidos são mostrados na figura 4.8. O que se pode observar é a grande diferença entre os Kerneis obtidos via método de Laguerre e os obtidos pelo algoritmo de Lee-Schetzen. Os de Lee-Schetzen carregam um forte ruído, ao passo que os de Laguerre são suaves em toda a sua extensão. A forma assintótica da curva dos kerneis de Laguerre é ideal, não há trepidações ruidosas como nas curvas do método de Lee-Schetzen. Tal comportamento deve decorrer da força

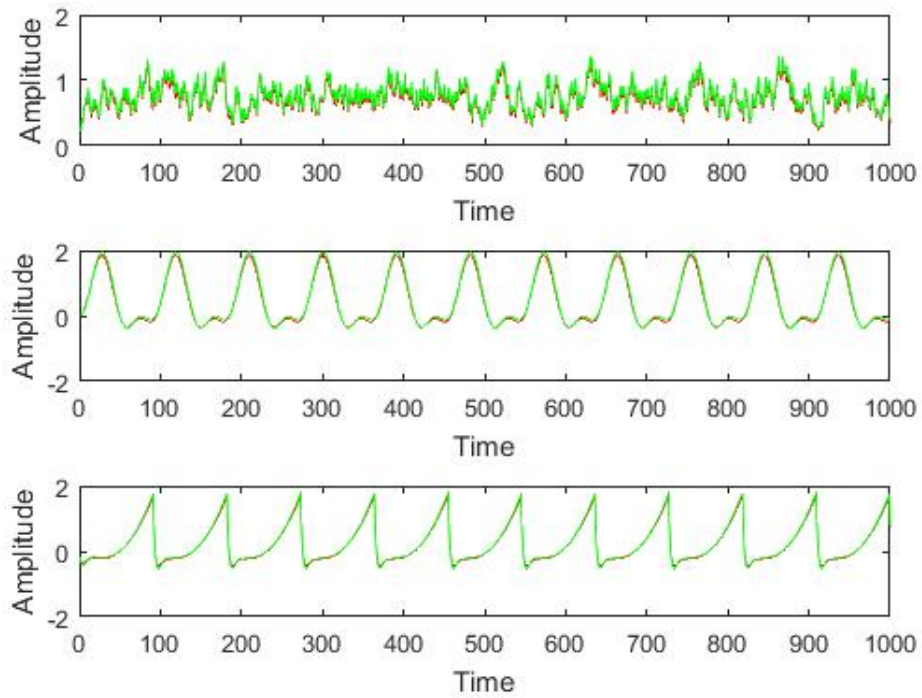


Figura 4.7: Saídas originais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por ruído branco, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante entrada aleatória, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra

do algoritmo de minimização dos erros quadráticos.

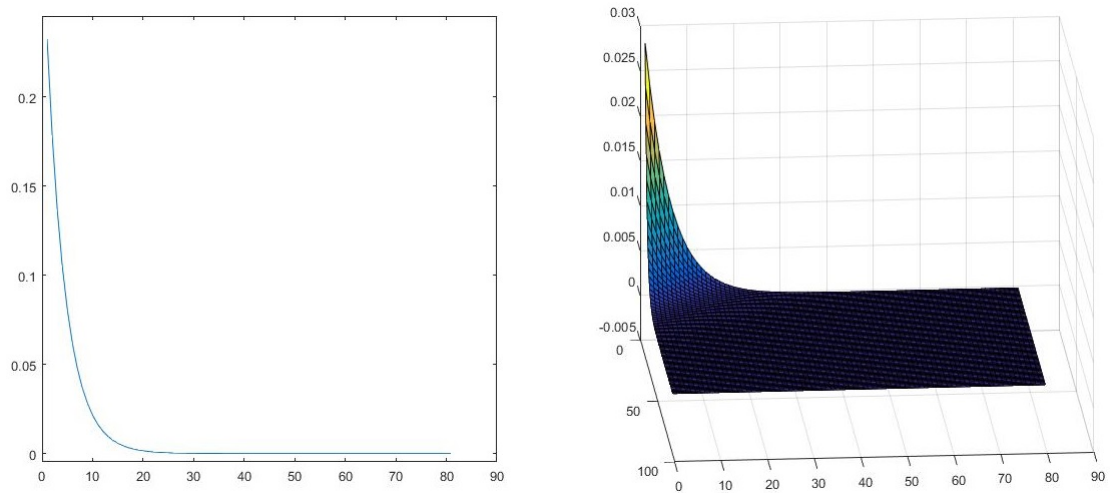


Figura 4.8: Kernels de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de expansão em funções de Laguerre, de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco gaussiano

A sobreposição entre a saída original e a saída estimada pelos kerneis é dada na figura 4.9. No caso da identificação feita por Lee-Schetzen ainda era possível ver uma diferença entre as duas curvas. Já nas curvas de saída oriundas do método de Laguerre essa diferença é quase invisível, ela só é possível de ser vista com um aumento considerável do zoom.

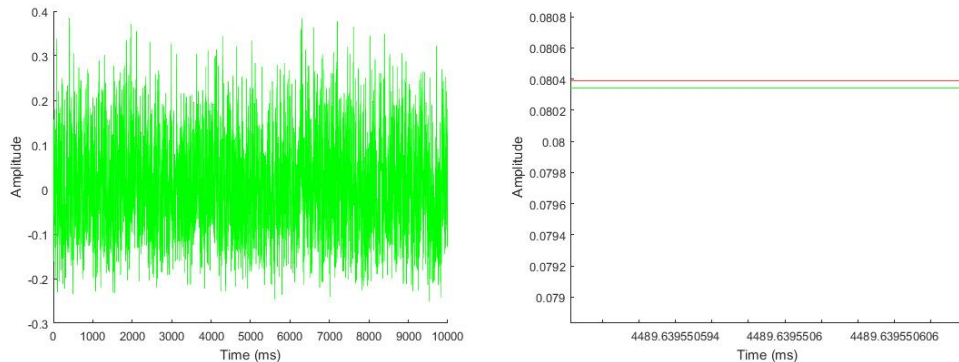


Figura 4.9: Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem, é importante mencionar que o zoom (figura direita) para a visualização da diferença entre os gráficos foi considerável

A seguir, como na avaliação da fidelidade do modelo, três entradas (as mesmas utilizadas anteriormente, figura 4.6), foram convoluídas com os kerneis de Volterra obtidos, e as saídas estimadas dessa convolução, foram comparadas com as saídas originais que o sistema forneceria. Tal situação é mostrada na figura 4.10. Observa-se que o sistema obtido produz saídas muito próximas aos casos originais, o que mostra a eficiência do método de Laguerre em estimar o comportamento de um sistema não-linear.

4.3 Comparação à partir de entradas genéricas

Na sessão anterior os modelos de segunda ordem dos kerneis de Volterra foram obtidos mediante uma entrada ideal: o ruído branco gaussiano. No entanto, tal entrada é às vezes é muito difícil de conseguir. É por isso importante que o sistema possa ser identificado à partir de outras entradas. No presente trabalho, utilizou-se como entradas alternativas ao ruído branco, uma onda quadrada com ruído adicionado, e uma senoide com frequência aumentada exponencialmente. Essas entradas são como mostra o lado esquerdo da figura 4.11. A direita temos a auto correlação de ambas as funções. Podemos ver que no caso da onda quadrada a autocorrelação diverge totalmente da requerida pelo método de Lee-Schetzen , no entanto, no caso da senoide com aumento exponencial de frequência temos uma correlação muito próxima à correlação do ruído branco, a menos da base, que como podemos ver, oscila.

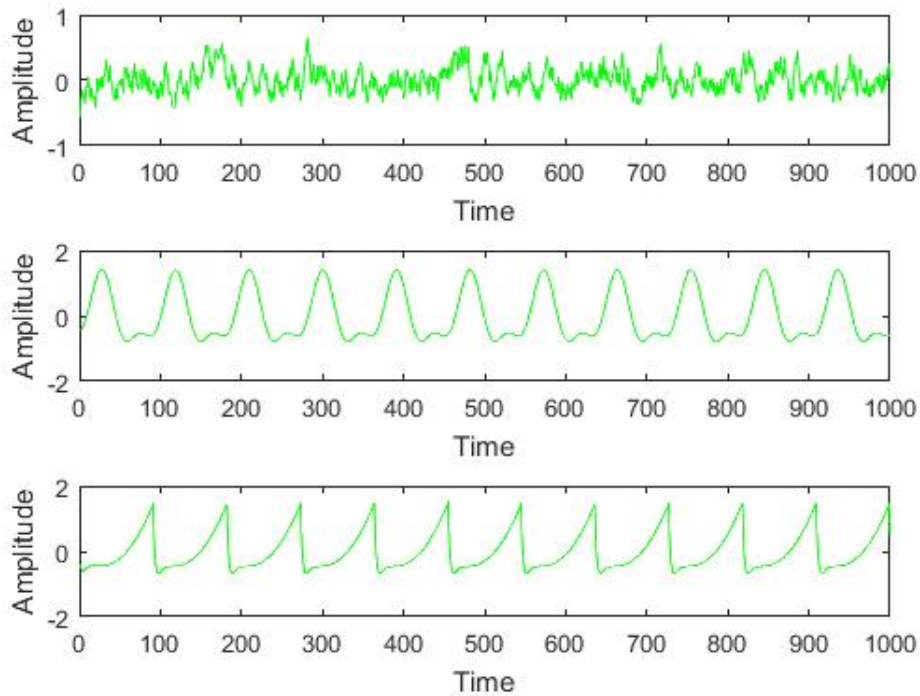


Figura 4.10: Saídas reais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por ruído branco, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante entrada aleatória, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra

4.3.1 Algoritmo de Lee-Schetzen

Ao obter os kernels de Volterra usando o algoritmo de Lee-Schetzen, e posteriormente simular a saída do sistema quadrático já mencionado, usando por base uma entrada de onda quadrada com ruído obteve-se um resultado bastante rudimentar. A figura 4.12 mostra a má qualidade do método de Lee-Schetzen para essa situação. Vê-se por essa mesma figura que a estimativa passa dos valores que deveria estimar em mais de três mil por cento. E ao estudar-se os dois kernels, de primeira e segunda ordem (figura 4.13) nota-se igual primarismo qualitativo, pois os dois acabam divergindo profusamente do comportamento assintótico geralmente exibido pelos kernels.

As figuras 4.14 e 4.15 mostram os dados obtidos de um sistema simulado com uma senoide de aumento exponencial de frequência ao invés de um ruído branco. A estimativa da saída, apesar de ser melhor que o caso anterior, onde a entrada foi uma onda quadrada, ainda é rudimentar, nota-se que para frequências menores a estimativa diverge muito, no entanto, a medida que a frequência aumenta, a curva da estimativa parece se aproximar da curva de saída original. Apesar disso os Kernels de primeira e segunda ordem parecem também estar mais próximos do comportamento assintótico do que no caso da onda quadrada.

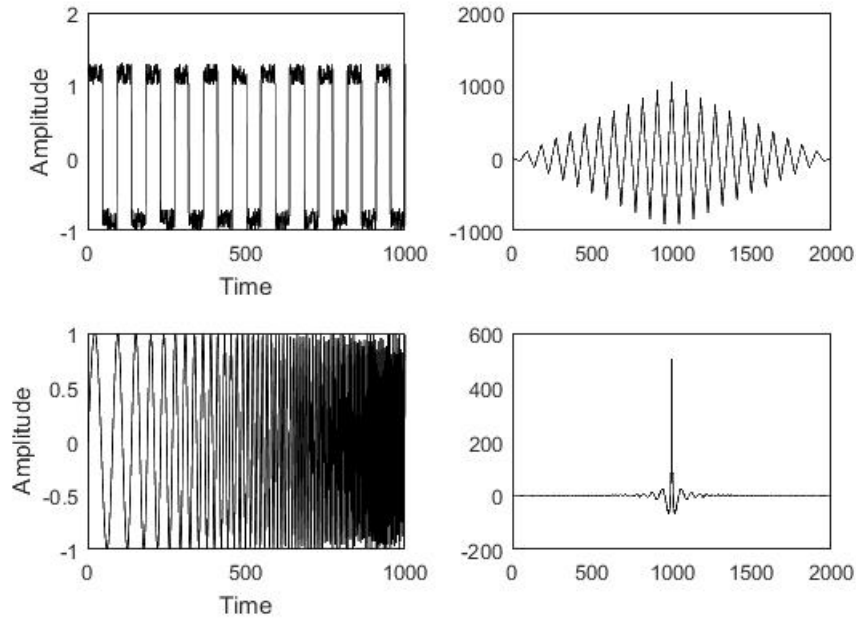


Figura 4.11: Entradas alternativas ao ruído Branco, e suas respectivas correlações (à direita). Use-se uma onda quadrada com ruído adicionado e uma senoide com aumento de frequência exponencial

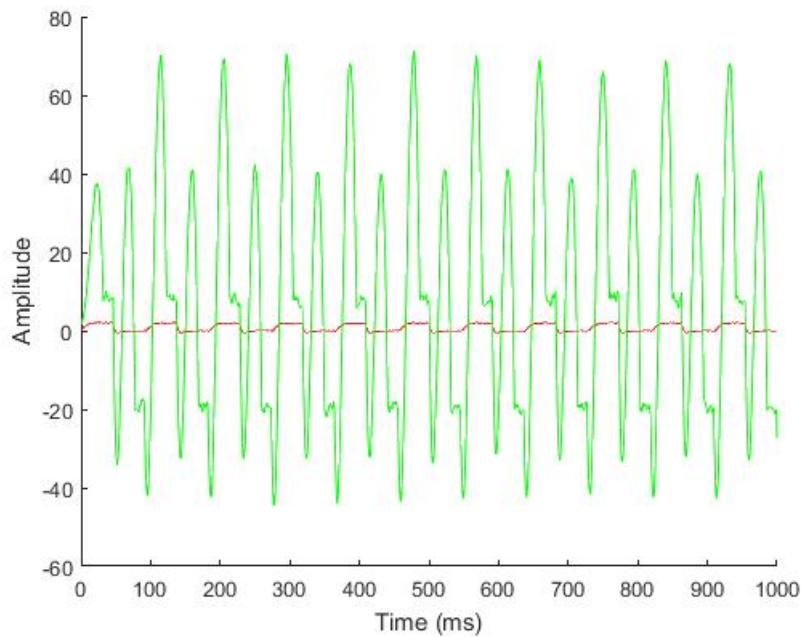


Figura 4.12: Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda quadrada

4.3.2 Método de expansão via funções de Laguerre

Usando agora o método de Laguerre, um modelo em termos de kernels de Volterra foi obtido para o par entrada/saída onde a entrada é uma onda quadrada, e para o par entrada/saída onde

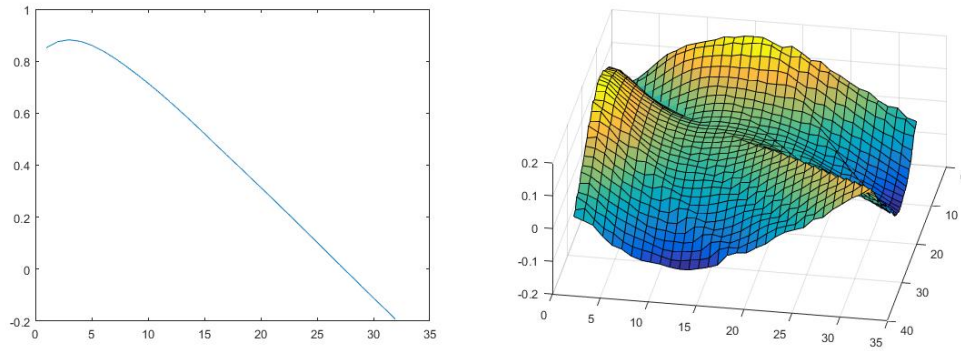


Figura 4.13: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo onda quadrada com ruído

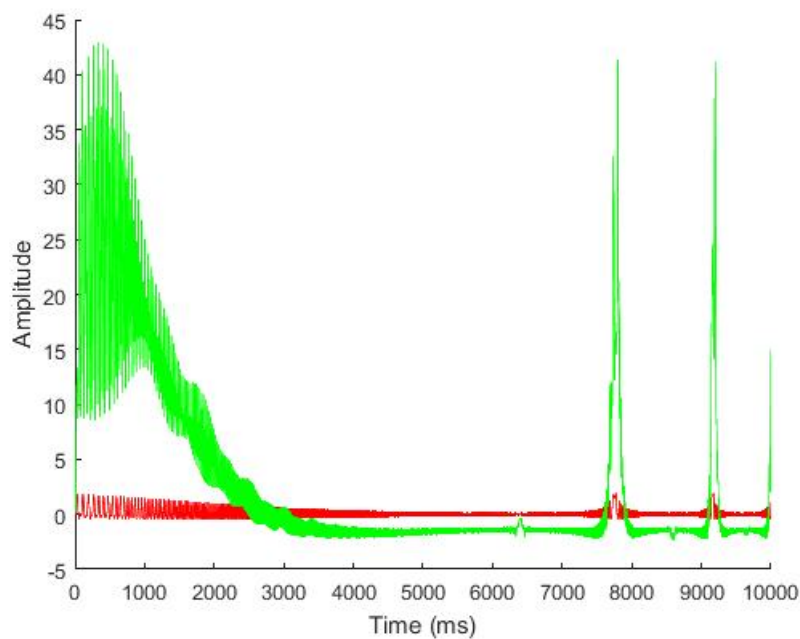


Figura 4.14: Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda senoide

a entrada é uma senoide. As figuras 4.16 e 4.19 mostram os resultados das simulações. É importante ressaltar que a saída estimada e a saída original estão sobrepostas em ambos os gráficos. A capacidade de estimação de sistemas pelo método de Laguerre não faz perceber a curva vermelha (que é a saída original), essa só podendo ser percebida por meio de zoom considerável, tamanha a proximidade entre as curva estimada e a saída original do sistema de segunda ordem.

Também nota-se as curvas que constituem os kerneis de Volterra nas figuras 4.17 e 4.20, pois elas consistem de assintotas perfeitas, tanto para o caso do kernel de primeira ordem como para o de segunda. Tais curvas mostram a superioridade do método de Laguerre perante o de Lee-Schetzen.

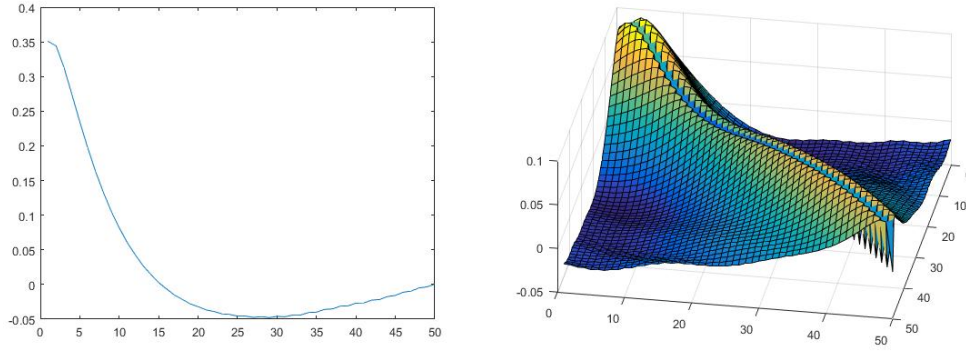


Figura 4.15: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo senoide

Ademais, foi verificada a fidelidade tanto do sistema estimado pela onda quadrada quanto pela senoide. Nos dois casos, o sistema estimado pelos kerneis mostrou ser confiável e fidedigno em relação ao sistema original , só sendo possível notar a diferença entre saída estimada e saída original depois de considerável zoom. As figuras 4.18 e 4.21 mostram os dois casos, onde nos dois, saída original e saída estimada estão sobrepostos.

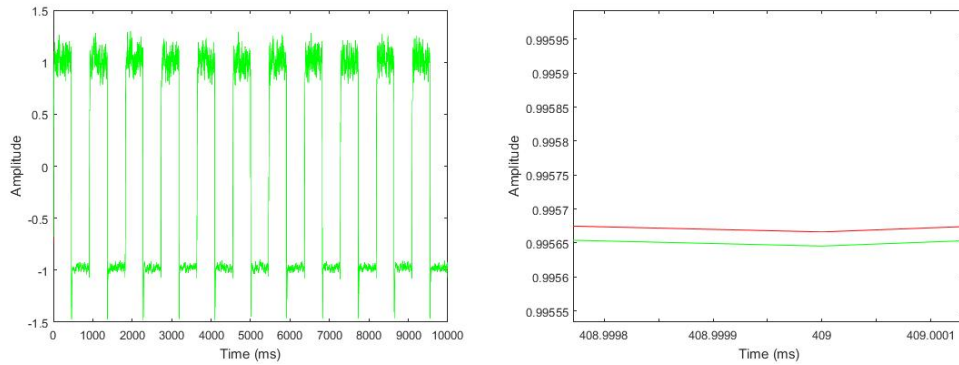


Figura 4.16: Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem, (é importante mencionar que o zoom para a visualização da diferença entre os gráficos foi considerável), o sistema foi obtido com uma onda quadrada

4.4 Comparação quanto a estimativa de um sistema de terceira ordem

A maioria dos sistemas não-lineares são de ordem infinita, ou seja, para que possam ser modelados pela série de Volterra em plenitude, precisaria-se de todos os kerneis, da ordem zero até o infinito. Como isso não é possível, truncamos o nosso sistema em ordem mais baixa. O presente trabalho trata até a ordem 2. Por isso mesmo é importante verificar a capacidade dos kerneis de segunda ordem modelarem comportamentos de ordens mais altas, (assumindo a hipótese de que isso seja possível). Assim, baseado no sistema de segunda ordem disponibilizado pelo professor

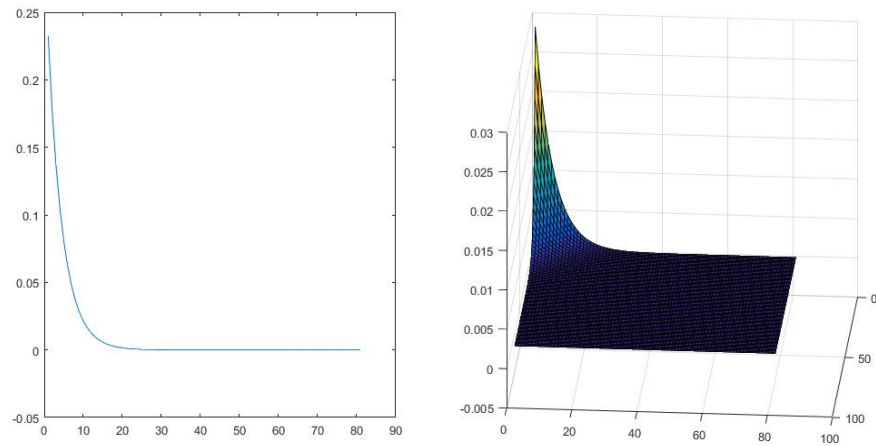


Figura 4.17: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo onda quadrada com ruído

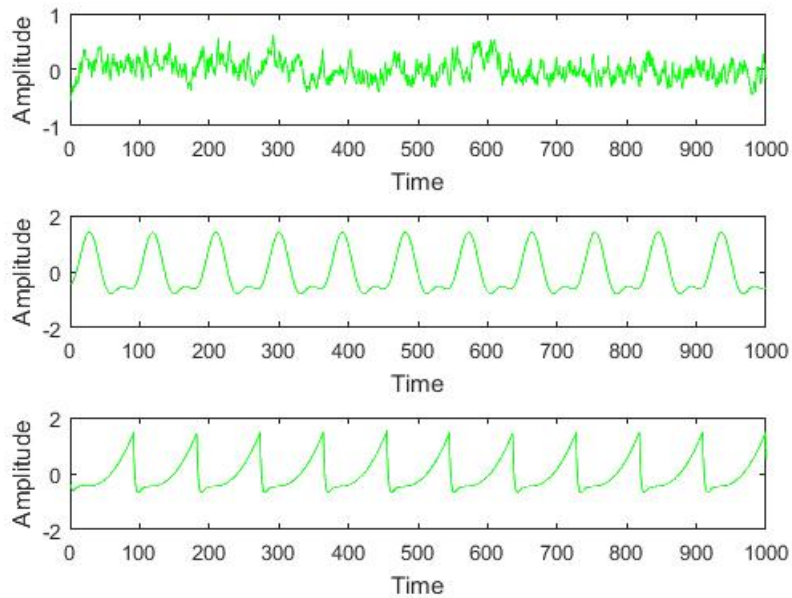


Figura 4.18: Saídas reais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda quadrada, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante onda quadrada, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra

Wim Van Drongelen,[2]; foi construído um sistema de terceira ordem para testar o poder de estimativa dos kerneis de Volterra de segunda ordem. É importante dizer também que os kerneis foram obtidos mediante entradas do tipo ruído branco gaussiano.

Para o método de Lee-Schetzen o resultado da estimativa é como mostrado na figura 4.22, onde

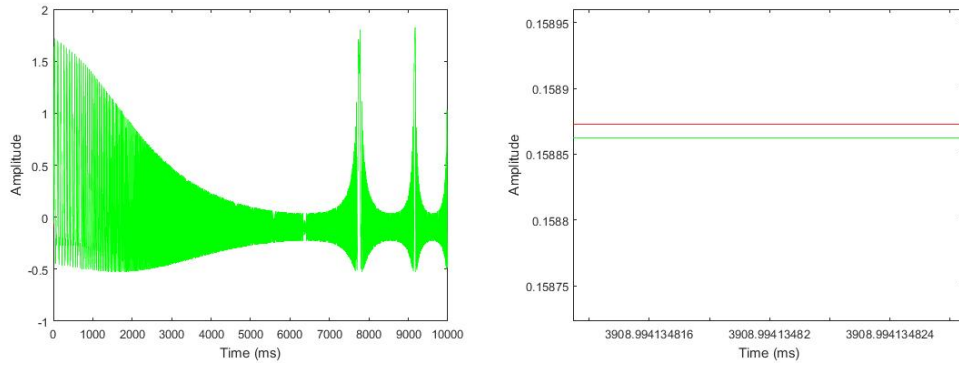


Figura 4.19: Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem, (é importante mencionar que o zoom para a visualização da diferença entre os gráficos foi considerável), o sistema foi aqui modelado com uma senoide

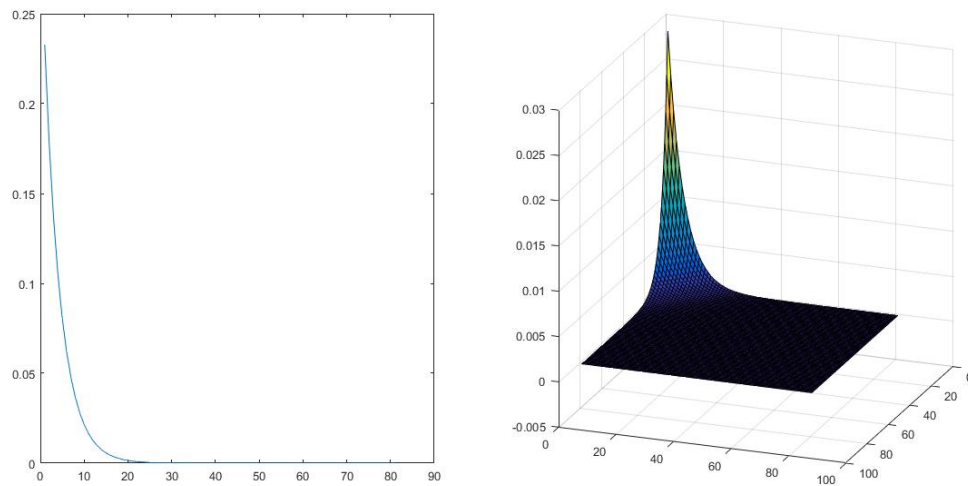


Figura 4.20: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , de um sistema não linear de segunda ordem, a partir de entrada do tipo senoide

o estimado é verde e o original é vermelho, aí pode-se ver que o estimativa é boa para a entrada do tipo aleatória, mas é de baixa qualidade para uma entrada de tipo senoide e dente de serra. O mesmo acontece para a estimativa usando o método de Laguerre (figura 4.24), os resultados são divergentes do esperado, e são inferiores a todas as outras estimativas já feitas pelo mesmo método no presente trabalho.

No entanto, analisando os kerneis de ambos os métodos (figuras 4.23 e 4.25), percebe-se que a qualidade assintótica é visível em ambos, (ainda que o ruído seja considerável no caso dos kerneis obtidos pelo método de Lee-Schetzen). O que leva a perceber a limitação dos kerneis de segunda ordem em estimar os comportamentos de terceira ordem. A diferença nas saídas estimadas e originais, só deve ser superada por um kernel de terceira ordem.

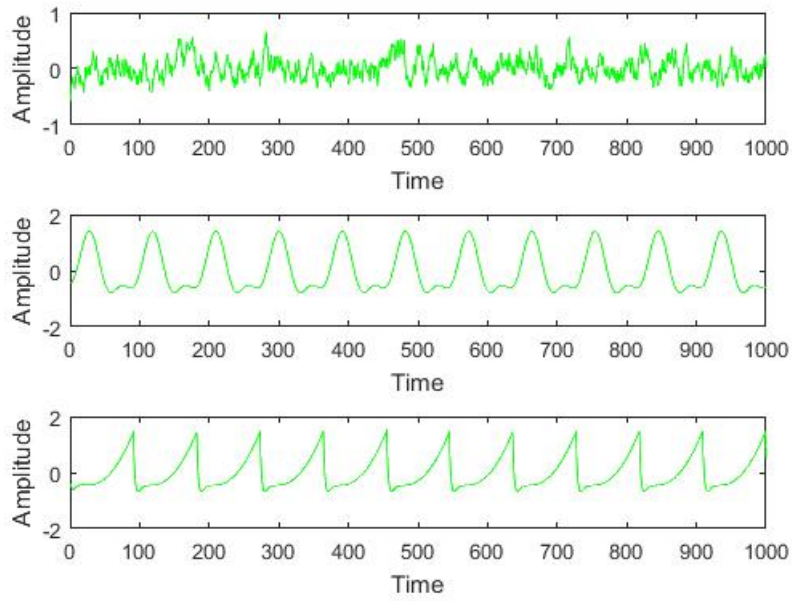


Figura 4.21: Saídas reais (em vermelho) e saídas estimadas pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de segunda ordem estimado por onda senoide, o primeiro gráfico é a saída do sistema mediante entrada aleatória, o segundo a saída do sistema mediante onda senoidal, e o terceiro, a saída mediante entrada do tipo dente de serra

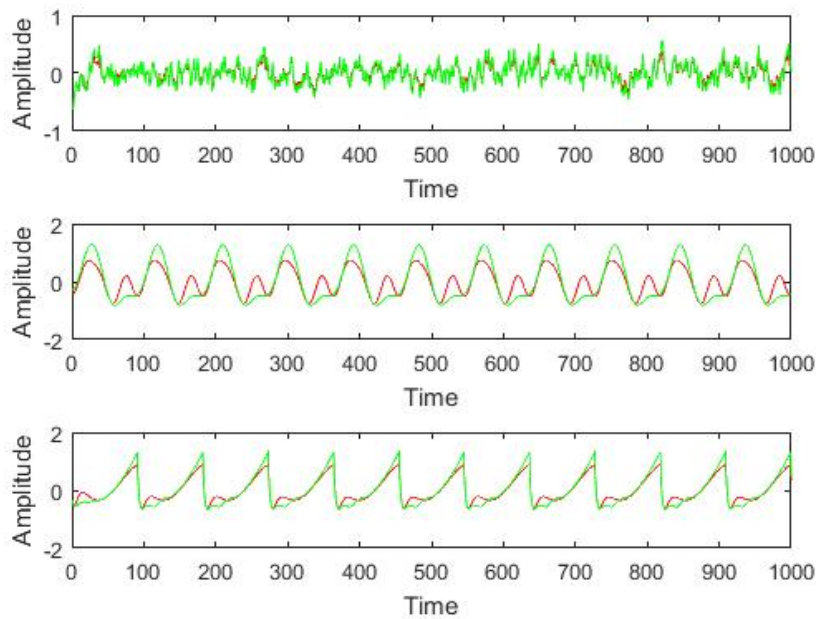


Figura 4.22: saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema de terceira ordem

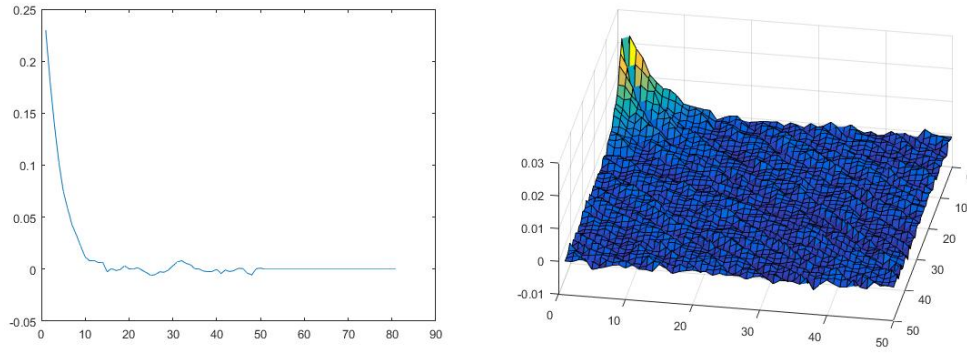


Figura 4.23: Kernels de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen , de um sistema não linear de terceira ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco

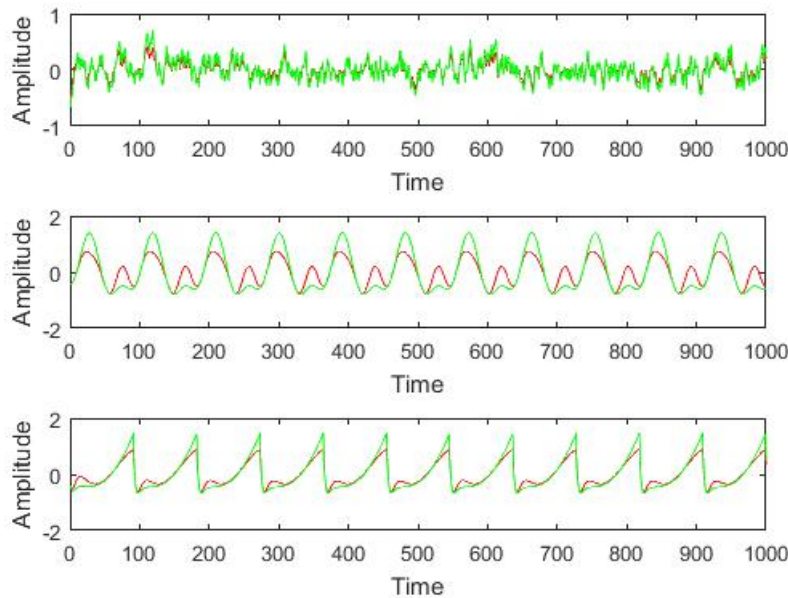


Figura 4.24: Saída original (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema de terceira ordem

4.5 Comparação à partir de dados reais

A proposta desta sessão é estudar a eficiência de estimativa dos métodos de Lee-Schetzen e de Laguerre perante sistemas físicos reais, pois é nesses mesmos que reside a utilidade de tais métodos, bem como da série de Volterra enquanto tal. O sistema físico supramencionado consiste na relação respiração/ intervalo R-R de um indivíduo. Para detalhar mais, tal indivíduo foi submetido a uma situação de repouso (Assistir ao filme Fantasia, da Disney, 1940) enquanto os sinais referentes a sua respiração e o seu eletrocardiograma foram coletados, [5]. Então um sistema do tipo SISO foi concebido, com a respiração do indivíduo sendo a entrada, e o sinal de intervalo entre os picos R

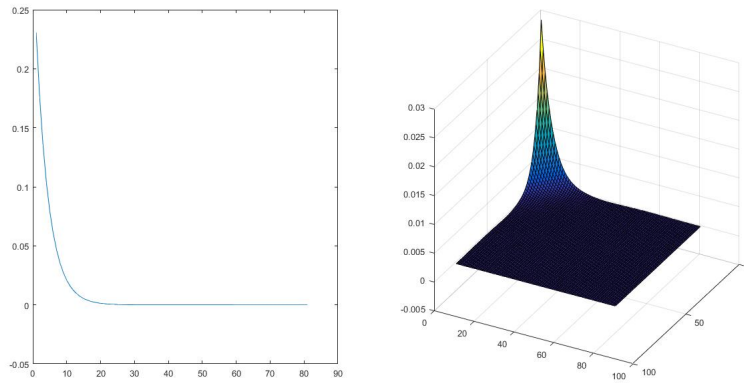


Figura 4.25: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , de um sistema não linear de terceira ordem, a partir de entrada do tipo ruído branco do eletrocardiograma, a saída. A figura 4.26 mostra o digrama de blocos que ilustra o sistema.



Figura 4.26: Diagrama de blocos para o sistema concebido, onde o sinal de entrada é a respiração do indivíduo , e o sinal de saída é o intervalo R-R do Eletrocardiograma

A figura 4.27 mostra no gráfico de cima a entrada utilizada, já no gráfico do meio podemos ver que a auto-correlação do sinal de entrada assemelha-se levemente a do ruído branco gaussiano. E no gráfico de baixo, o que se mostra, é a saída na forma do sinal de intervalo R-R do eletrocardiograma.

A figura 4.28 mostra-nos o resultado da simulação do sistema físico por meio do algoritmo de Lee-Schetzen. O que a figura nos mostra é que a estimativa de Lee-Schetzen passa muito dos valores esperados. Vemos que a capacidade do algoritmo em determinar o comportamento do sistema mostrou-se rudimentar. O que reforça o requisito do algoritmo em usar entradas que sejam estritamente do tipo ruído branco. A figura 4.29 mostra os kerneis de Volterra obtidos pela simulação. Vemos que nenhum dos Kerneis teve o comportamento assintótico esperado, o primeiro kernel oscilou demais, e o segundo também, além de não ter mostrado a forma da decida inicial como era esperado.

A figura 4.30 mostra-nos o resultado da simulação pelo método de expansão de Laguerre. Vemos que diferentemente do caso de Lee-Schetzen, temos agora uma estimativa bastante próxima da saída original do sistema. É possível que a estimativa não tenha sido boa quanto nos casos anteriormente estudados por conta de termos de ordem superior à segunda, ou ainda fatores externos, que não a respiração, que podem ter influência na saída do sistema. A figura 4.31 mostra as curvas dos kerneis de Volterra obtidos. Podemos ver que tanto para o kernel de primeira ordem quanto para o de segunda ordem, não temos um comportamento que lembre uma assintota. O Kernel de

primeira ordem oscila e não parece se aproximar de nenhum valor específico e o de segunda ordem também oscila demais na sua origem.

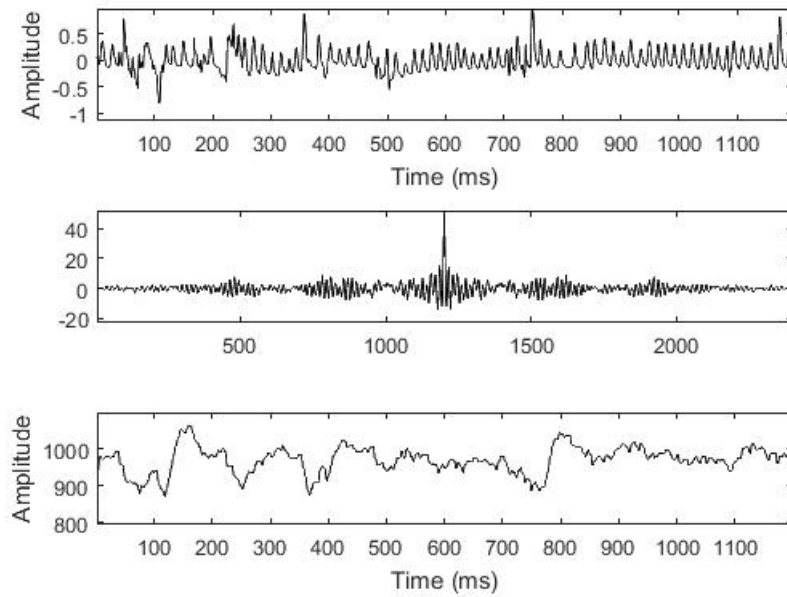


Figura 4.27: De cima pra baixo: sinal de entrada usado (respiração do indivíduo), autocorrelação do sinal de entrada, sinal interpretado como saída (intervalo R-R do Eletrocardiograma)

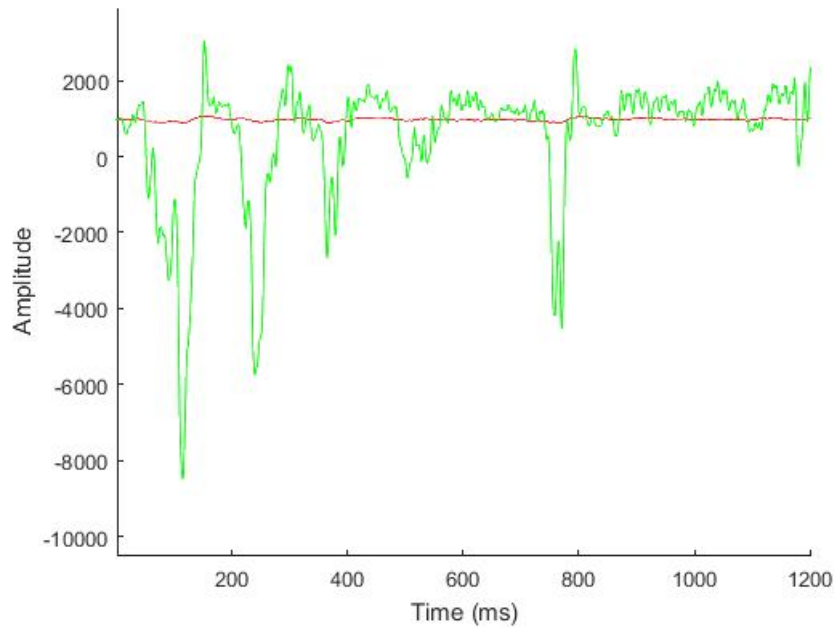


Figura 4.28: Saída real (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Lee-Schetzen (em verde), para um sistema real (relação respiração/intervalo R-R do ECG de um indivíduo)

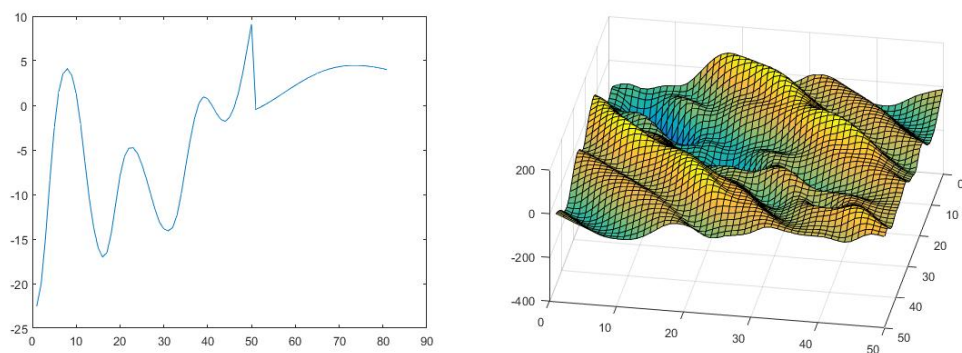


Figura 4.29: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Lee-Schetzen ,para sistema real (relação respiração/intervalo R-R do ECG de um indivíduo)

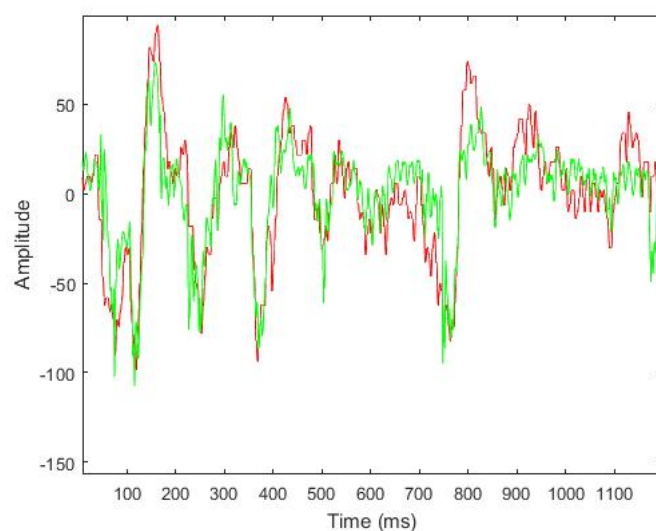


Figura 4.30: Saída real (em vermelho) e saída estimada pelo algoritmo de Laguerre (em verde), para um sistema real (relação respiração/ intervalo R-R do ECG de um indivíduo)

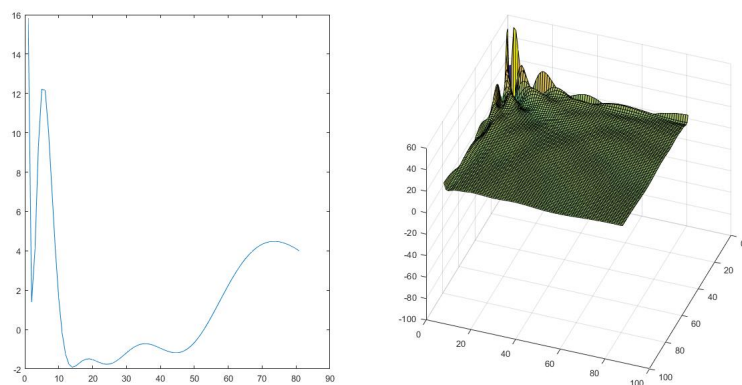


Figura 4.31: Kerneis de primeira ordem (esquerda) e segunda ordem (direita) obtidos via método de Laguerre , sistema real (relação respiração/ ECG de um indivíduo)

Capítulo 5

Conclusões

O uso do método de expansão de Laguerre nas séries de Volterra mostrou-se uma ferramenta poderosa na identificação dos sistemas não lineares, tanto nos casos onde a entrada foi completamente aleatória, quanto naqueles onde a entrada foi mais próxima do real. Se assumirmos que um dado sistema não-linear sempre pode ser decomposto em termos de diversas ordens, onde as componentes de ordens inferiores tem predomínio sobre as de ordem superior, podemos concluir que, sob a égide do método de Laguerre, o uso das Séries de Volterra para o seu modelamento é totalmente pertinente. Tal ferramenta propiciou boa estimativa mesmo nos casos onde não era esperado que acontecesse, como quando se utilizou de onda quadrada para identificar o sistema. A força do método de Laguerre reside justamente no mecanismo de minimização do erro quadrático, quando da determinação dos coeficientes de expansão.

O sucesso da técnica de expansão de Laguerre talvez só possa ser comparável a pobreza da qualidade do método de Lee-Schetzen, haja vista que em qualquer caso onde o sinal de entrada usado para determinar os kernels não fosse estritamente aleatório, o método falha em determinar boa aproximação, o que mostra a imprescindibilidade do ruído branco. O problema é que o ruído branco nem sempre é simples de conseguir nos sistemas físicos; um dos fatores que garantem essa dificuldade é a sua banda infinita de frequência, a qual os sistemas físicos podem não responder.

Em todos os casos estudados podemos notar o seguinte: os melhores casos, onde os kernels de Volterra simulam melhor os sistemas são quando as curvas desses kernels se apresentam como uma assintota. Em todos os casos, podemos observar também que nas melhores estimativas, as curvas dos kernels partem de valores altos e rapidamente se aproximam de um valor mais baixo, sem toca-lo, também numa forma assintótica. E também, é imperativo que se diga que nas piores estimativas os kernels de Volterra tiveram comportamento oscilatório, sem se aproximar de nenhum valor em específico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WESTWICK, D. T.; KEARNEY, R. E. *Identification of nonlinear physiological systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.
- [2] DRONGELEN, W. V. *Signal processing for neuroscientists*. [S.l.]: Academic press, 2018.
- [3] MARMARELIS, V. Z. Identification of nonlinear biological systems using laguerre expansions of kernels. *Annals of biomedical engineering*, Springer, v. 21, n. 6, p. 573–589, 1993.
- [4] MARMARELIS, V. Z. *Nonlinear dynamic modeling of physiological systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- [5] IYENGAR, N. et al. Age-related alterations in the fractal scaling of cardiac interbeat interval dynamics. *American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, American Physiological Society Bethesda, MD, v. 271, n. 4, p. R1078–R1084, 1996.